

# KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR UFO

vzorové riešenia 1. série

1.ročník

letný semester

školský rok 2007/2008

[www.fks.sk/](http://www.fks.sk/)



UFO, KTFDF FMFI UK

Mlynská dolina

842 48 Bratislava

[otazky@fks.sk](mailto:otazky@fks.sk)

## 1.1 Objemný problém (opravovali Halucinka, Palo a MatoK)



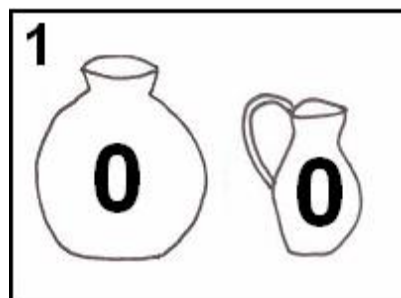
V tomto príklade vystupujú dve nádoby. Zoznámte sa: prvá má objem presne 8 litrov a na sebe obrázok mayského bôžika, ktorého úlohou bolo starať sa o to, aby všetky kukuričné zrnká v klase boli pekne rovnomerne opálené. Druhá, menšia, s objemom rovné 3 litre, vyzerá nepravidelne, ako keby prežila zrážku s autom. Napriek tomu má však na sebe funkčné ucho. Vymyslíte spôsob, ako len s pomocou týchto nádob a vodovodného kohútika naplniť do väčšej nádoby presne 7 litrov vody!



Na začiatok vás chceme pochváliť, že veľa z vás tento príklad zvládlo skvele:-). Bodík sme strhávali za nedostatočné odvodňovanie, ale to sa naučíte:-), čo po vás chceme:-). A nejaké bodíky šli za to, keď ste zle pochopili zadanie a mysleli ste si, že máte tých 7 litrov dostať v nejakej tretej nádobe. Taktiež niektorí si mysleli, že sú experti a vedia presne odliatť polovicu vody v nádobe. Nás to však nepresvedčilo, preto sme všetkým takýmto strihli okolo 2,5 bodíkov. Na koniec ešte napíšeme, že sa tešíme na vaše ďalšie riešenia:-). A posielajte aj čiastočné riešenia, lebo ak dostaneme záchvat kreativity ako teraz, tak vás čakajú usmievané obrázky a to si predsa nenecháte ujsť, nie? :-)

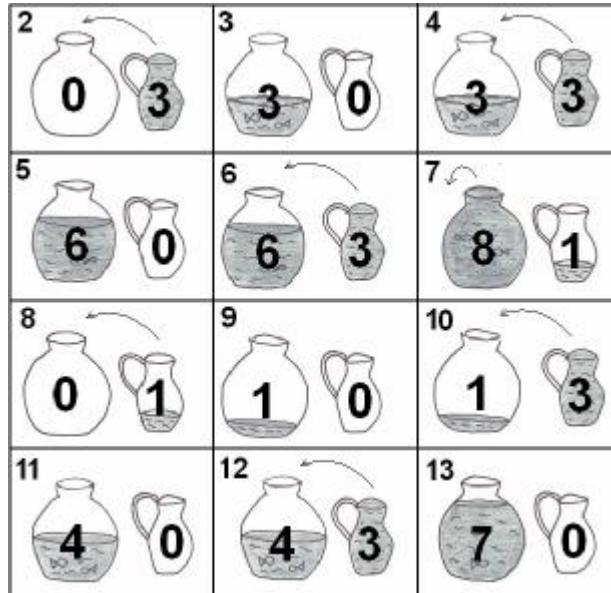
Bez toho, aby sme vyrušili mayského bôžika, začneme prelievať vodu nádobami. Obidve nádoby sú úplne nepravidelné. Ak chceme vedieť, koľko vody sme do nich nabrali, musíme ich napúšťať vždy doplna. Napríklad nevieme presne napustiť 5 litrov do 8-litrovej nádoby. Ak chceme dostať presne 5 litrov, musíme najprv naplniť 8-litrovú nádobu doplna a potom z nej odliatť 3 litre do druhej nádoby.

Teraz sa pozrime na to, ako takýmto spôsobom dostať v 8-litrovej nádobe 7 litrov vody (hmm... do 3-litrovej by sa to asi nevpratало :D...). Na začiatku máme dve možnosti – naliať vodu do 3- alebo 8-litrovej nádoby. Obomi možnosťami sa dá postupne dostať k siedmim litrom vo väčšej nádobe. Popíšeme si oba spôsoby. Na začiatku máme obe nádoby prázdne:

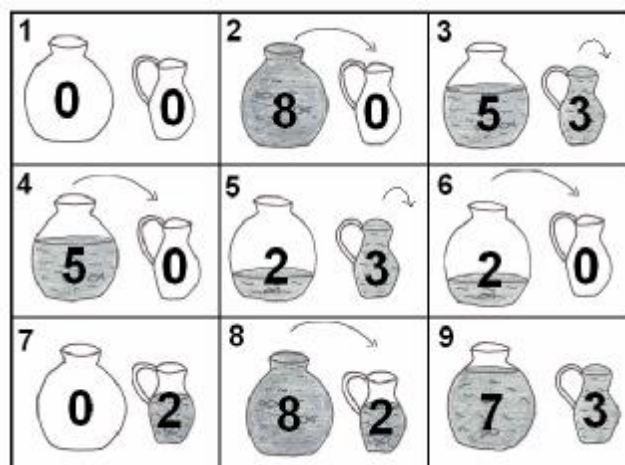


A) Naplníme doplna 3-litrovú nádobu. Tieto 3 litre prelejeme do 8-litrovej nádoby. Znova naplníme 3-litrovú nádobu a prelejeme všetku vodu z nej do 8-litrovej nádoby. Teraz máme v 8-litrovej nádobe 6 litrov vody. Ešte raz naplníme 3-litrovú nádobu, ale do 8-litrovej sa

zmestia už len 2 litre vody, čiže 1 liter zostane v 3-litrovej nádobe. Teraz všetku vodu z 8-litrovej nádoby vylejeme a prelejeme do nej 1 liter z 3-litrovej nádoby. Treba nám už len 6 litrov vody priliat' do 8-litrovej nádoby aby sme v nej dostali 7 litrov vody. Teda nám stačí už len dvakrát naplniť 3-litrovú nádobu a vodu z nej vyliat' do 8-litrovej nádoby. A máme 7 litrov vody. YES! :)



B) Naplníme doplna 8-litrovú nádobu. Z tejto nádoby odlejeme vodu do 3-litrovej nádoby tak, aby bola naplnená doplna a teda nám v 8-litrovej nádobe zostane 5 litrov vody, 3 litre z 3-litrovej nádoby vylejeme na svojho najobľúbenejšieho vedúceho (keďže v zadaní nemáme umývadlo a odtok :) Znova odlejeme z 8-litrovej nádoby vodu do 3-litrovej nádoby tak, aby tá menšia bola úplne plná, teda v 8-litrovej nádobe nám zostanú už iba dva litre vody. Plnú 3-litrovú nádobu vylejeme na druhého najobľúbenejšieho vedúceho a prelejeme do nej 2 litre z 8-litrovej nádoby. Teraz si 8-litrovú nádobu naplníme vodou a odlejeme z nej toľko vody, aby bola 3-litrová nádoba plná. V 3-litrovej nádobe sme mali 2 litre, čiže do nej vieme odliat' presne 1 liter z 8-litrovej nádoby. To znamená, že v 8-litrovej nádobe nám zostalo vysnívaných 7 litrov vodičky :).



## 1.2 Autá (opravovali HAgO a Juro)

Kamarát Jano chodíva každé ráno autom do práce cestu dlhú 40km. Keďže vie, že stres môže spôsobiť pásový opar, jazdí v klude. Pred tým, ako sa vydá na cestu, spočíta si, akou priemernou rýchlosťou musí jazdiť, aby do práce dorazil včas. Včera mu vyšlo, že ideálne by bolo dodržiavať priemernú rýchlosť 60 km/h. Keďže však Janičko mal dobrú náladu, prvú polovicu cesty (20km) prešiel v rozšafnom tempe 90 km/h. Akou rýchlosťou musí ísť druhú polovicu cesty, aby prišiel akurát načas?

Na úvod Jana otcovsky pokarhajme. 90 kilometrov za hodinu je ozaj veľa, hlavne ak šiel v meste a skoro ráno. Našťastie sa ale nič nikomu nestalo a my sa môžeme pustiť do počítania.

Prvú polovicu cesty sme prešli rýchlosťou 90 km/h, preto ak druhú prejdeme rýchlosťou 30 km/h, dokopy to dáva priemernú rýchlosť 60 km/h. Tak takto presne **nemá** vyzerat' riešenie tohto príkladu. Inými slovami: Celé zle! Že prečo? Predstavte si, že by v úlohe namiesto rýchlosti 90 km/h bolo 120 km/h. Rovnakou úvahou by sme potom dostali zaujímavý výsledok: Jano musí prejsť druhú polovicu dráhy rýchlosťou 0 km/h. Čo mu bude trvať.. nekonečne dlhý čas. Nevie ako vám, mne sa pri pohľade na takýto výsledok robí zle od žalúdka. Kde presne sa stala chyba si vyjasníme v závere, najprv si poďme porátať, ako to vlastne malo byť.

Pri riešení si stačí spomenúť na vzťah, ktorý hovorí o tom, akú dráhu prejdeme pri rovnomernom pohybe rýchlosťou  $v$  za čas  $t$ . Táto dráha je  $s = v \cdot t$ . Z tohto vzťahu môžeme tiež zistiť, že dráhu  $s$  prejdeme rýchlosťou  $v$  za čas  $t = s / v$ . Čo to znamená v Janovom prípade? Dráhu 40 km by rýchlosťou 60 km/h prešiel za čas

$$\frac{40\text{km}}{60\text{km/h}} = \frac{2}{3} h = 40 \text{ min} .$$

Výsledky v minútach píšeme len pre lepšiu orientáciu a budeme vždy počítat' s časom v hodinách. Potom nemusíme premieňať km/h na iné jednotky rýchlosti. Jano šiel ale prvú polovicu cesty rýchlosťou 90 km/h, takže mu to trvalo iba

$$\frac{20\text{km}}{90\text{km/h}} = \frac{2}{9} h \approx 13,33 \text{ min} .$$

Jano ale chce, aby mu celá cesta trvala 40 minút ako mal naplánované a teda druhú polovicu chce prejsť za čas

$$\frac{2}{3} h - \frac{2}{9} h = \frac{4}{9} h \approx 26,66 \text{ min} .$$

Zo vzťahu  $s = v \cdot t$  sa tiež dozvedáme, akou rýchlosťou musíme ísť, aby sme dráhu  $s$  prešli za čas  $t$ , konkrétne  $v = s / t$ . Ak chce doraziť v plánovanom čase, musí ísť druhých 20 kilometrov rýchlosťou

$$\frac{20\text{km}}{\frac{4}{9}h} = \frac{20 \times 9}{4} \text{ km/h} = 45\text{km/h} .$$

Výpočet nebolo potrebné robiť s konkrétnymi číslami. Označíme celkovú dráhu, ktorú Jano chce prejsť  $s$ , rýchlosť ktorou sa hodlá pohybovať  $v$  a čas za ktorý touto rýchlosťou prejde túto dráhu  $t$ . Ďalej rýchlosť, ktorou sa pohybuje na prvej polovici dráhy označíme  $v_1$  a čas, za ktorý túto polovicu prejde  $t_1$ . Rovnako označíme  $v_2$  a  $t_2$  tie isté veličiny pre druhú polovicu. Našou úlohou je vypočítať rýchlosť na druhej polovici dráhy, teda  $v_2$ . A všetky úvahy z minulého odstavca môžeme zopakovať s písmenkami. Dostaneme tak všeobecný výsledok:

$$v_2 = \frac{1}{\frac{2}{v} - \frac{1}{v_1}} = \frac{vv_1}{2v_1 - v} ,$$

ktorého odvodenie nebolo síce podmienkou úspešného riešenia, ale môžeme mať dobrý pocit, že sme hustí. Ak teraz do tejto rovnice zadané hodnoty, dostaneme rovnaký výsledok 45 km/h.

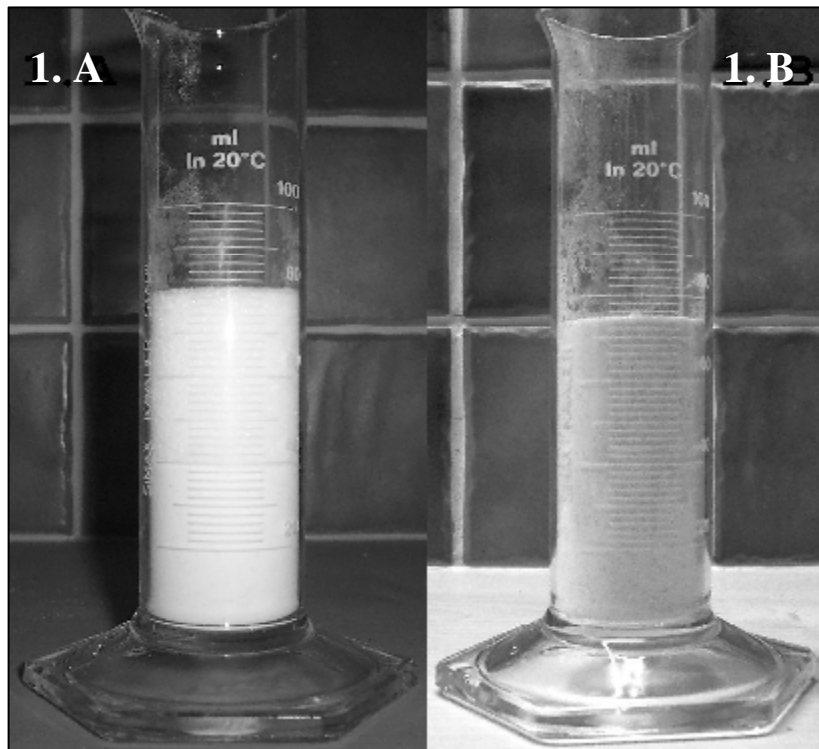
A kde teda bola chyba v úvahe na začiatku? Priemerná rýchlosť sa rovná priemeru z rýchlostí iba vtedy, keď sa týmito rýchlosťami pohybujeme rovnaký čas, teda napríklad hodinu jednou rýchlosťou a hodinu druhou. V našom prípade sa danou rýchlosťou vždy pohybujeme polovicu celej cesty a teda väčšou rýchlosťou sa pohybujeme vždy kratšie. A preto to nevyjde. Skúste nad poslednými troma vetami chvíľu pomeditovať, nechcem sa chváliť, ale myslím, že sa mi podarili.

### 1.3 Múka + cukor = ? (opravovali Samoa Judita)

*Vezmite dva rovnaké poháre, jeden naplňte kryštálovým cukrom a druhý hladkou múkou. Zmiešajte obsah oboch pohárov a poriadne ho premiešate. Aký objem bude mať výsledná zmes? Bude menší, rovnaký alebo väčší ako súčet objemov dvoch pohárov? Prečo je to tak?*

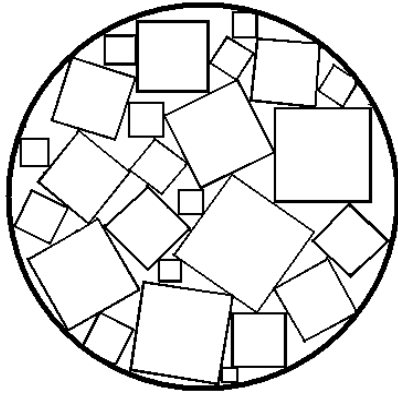
Milé naše Úfätá! Tento príklad nás zarazil. Odpoveď na otázku sa nám zdá byť jasná. Pohár plus pohár, to sú predsa dva poháre, nie? Prečo sa vôbec niekto takú jasnú vec pýta? Že by v tom bol skrytý nejaký háčik?

Ako správni Ufáci sme sa rozhodli zbaviť pochybností experimentom. Zašli sme do nášho ultramoderného laboratória na UFE a vzali sme si odmerný valec, kryštálový cukor a hladkú múku. Hneď sme sa pustili do práce. Na spodok valca sme nasypali 40 ml hladkej múky a na ňu ešte prisypali ďalších 40 ml kryštálového cukru. Takto sa nám podarilo naplniť valec až do 80 ml, ako môžete vidieť na obrázku 1.A. Potom sme celú zmes poriadne premiešali a zadívali sme sa na valec znovu. To, čo sme uvideli, sme však nečakali. Vo valci nám zostalo len 74 ml! Ak neveríte, pozrite si obrázok 1.B.



Kam sa podelo zvyšných 6 ml? Veď sme nič nevysypali, dávali sme si pozor. Žeby sa cukor počas miešania vyparil? Alebo nám ho ukradli nenásytní Kvarkovia<sup>1</sup>? Dlho sme sa takto trápili. Potom Judita dostala nápad. Doniesla lupu a zadívala sa ňou na kryštálový cukor v pohári. To, čo uvidela, pripomínalo zle naskladaný tetris (pozri obrázok).

<sup>1</sup> Kvarkovia ako prví objavili planétu Zem, neznáme prostredie sa im však stalo osudným. Veľmi rýchlo podľahli závislosti na cukre. V súčasnosti ich potulné lode brázdia vesmír a kradnú cukor, kde sa dá. Ich smutný osud nech je nám naveky výstrahou pred okúsením tohto bieleho jedu.



Medzi jednotlivými kryštálkami cukru boli pomerne veľké medzery. Ak máte doma stavebnicové kocky, nahádzte ich do vedra a dobre si ich prezrite. Určite si všimnete, že medzi kockami vám vznikli podobné medzery, ako videla Judita v cukre. Za to, že v cukre tieto medzery voľným okom dobre nevidíme, môže malá veľkosť zrníčok.

Teraz si skúste predstaviť, čo sa stane, keď sa cukor poriadne premieša s múkou. Zrniečka múky sú oveľa menšie ako kryštálky cukru, preto bez problémov vyplnia medzery, ktoré v cukre boli a my sme potom prekvapení, ako je

možné, že  $40 \text{ ml cukru} + 40 \text{ ml múky} = 74 \text{ ml cukrovej múky}$ . Teraz však už vieme, že pri miešaní nám neubudlo ani z cukru ani z múky, iba sa zaplnili medzery, ktoré predtým v cukre boli.

Potešení, že sa nám záhadu podarilo úspešne vyriešiť, pustili sme sa do opravovania vašich riešení.

A prišlo nám ich skutočne požehnané. Prijemne nás prekvapilo, že väčšina z vás bez zaváhania tento ťažký problém rozlúskla. Radi by sme pochválili tých z vás, ktorý overili úlohu aj pokusom, špeciálne sa chceme poďakovať tým, ktorý svoje riešenia ilustrovali krásnymi obrázkami.

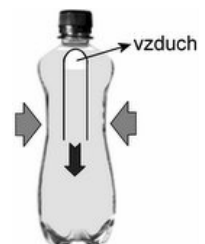
Mnohé zo správnych a skoro správnych riešení však boli krátke, jednovetné, napísané na malom zdrape papiera. Riešenia nám prosím naozaj posielajte každé napísané na samostatnom hárku formátu A4. V našom veľkom UFE sa môžu malinké útržky papiera veľmi ľahko stratiť. A nebojte sa nám napísať viac, prípadne doplniť riešenie obrázkami. Je potom menšia šanca, že vaše riešenie zle pochopíme, alebo nám v ňom bude niečo chýbať.

Jednou z častých chýb, ktorých ste sa dopustili, bolo zamieňanie si pojmov objem a hmotnosť. Mnoho z vás odvážilo múku a cukor pred zmiešaním a po zmiešaní, zistilo, že hmotnosť sa nezmenila a pokojne usúdilo, že objem sa teda tiež nemohol zmeniť. V jednom riešení sme sa dokonca dočítali, že  $1 \text{ kg} = 1 \text{ l}$ . Takto to však nefunguje. Po zmiešaní múky a cukru sa samozrejme žiadna múka a cukor nestratili, preto sa nemohla zmeniť ani ich hmotnosť. Avšak tým, že sa múka napchala do pôvodne prázdnych škár medzi kryštálkami cukru, sa jej podarilo ušetriť nejaké miesto a zmenšiť objem. (Podobne, keď si upracete izbu, je v nej viac miesta, no veci sú v nej stále tie isté.)

Niektorí z vás nám napísali, že výsledný objem bude menší, lebo molekuly múky preniknú medzi molekuly cukru. To však nie je pravda. Molekuly sú veľmi maličké, nemôžeme ich voľným okom vidieť. Sú to základné stavebné častice látok, žiadna látka sa nedá rozdeliť na menšie častice ako sú molekuly. Keď by ste rozdelili molekulu cukru, to, čo by ste dostali, by už nebol cukor ale nejaká iná látka. Kryštálik cukru však vidieť môžeme a môžeme ho aj rozdeliť na menšie čiastočky (určite poznáte práškový cukor), podobne je to so zrníčkami múky. Zrnká cukru aj múky sú tvorené veľkým množstvom molekúl (ani najlepší ufónsky počtár do toľko nevie napočítať), ktoré držia veľmi silno pokope a nepustia medzi seba žiadne cudzie molekuly.

#### 1.4 Potápač (opravoval Umaxo a Marcelka)

Do plastovej fľaše naplnenej vodou dajte hore dnom otočenú skúmavku (alebo podobnú nádobku), ktorá bude mať na vrchu vzduchovú bublinu. Vyrobité tak známu hračku, tzv. potápača. Ak má bublina vhodnú veľkosť, drží sa skúmavka pri vrchu fľaše, stačí však fľašu mierne rukami stlačiť a skúmavka klesá ku dnu. Fantastické! Ako to však funguje?



Najprv sa zrejme budeme musieť zamyslieť, prečo niektoré telesá plávajú na hladine a iné sa potopia. Zo skúsenosti každý vie, že napríklad železo, ktoré je ťažké, klesá nadol, zatiaľ čo ľahký polystyrén ostane plávať na hladine. Na prvý pohľad sa teda zdá, že ťažké veci klesajú nadol a ľahké plávajú. Ak sa však lepšie zamyslíme, zistíme, že toto vždy neplatí. Predsa obrovské lode vážiace mrte mrte ton plávajú, zatiaľ čo malé kamienky, ktoré vážia sotva pár gramov, klesajú ku dnu. Ktorá vlastnosť telesa teda rozhoduje, či sa teleso potopí alebo nie?

Odpoveď na otázku nám pomôže nájsť zákon, ktorý objavil a sformuloval Archimedes. Tento zákon hovorí o tzv. vztlakovej sile, ktorá nadľahčuje teleso, ktoré je ponorené do vody. Veľkosť vztlakovej sily je rovná  $V\rho g$ , kde  $V$  je objem ponorenej časti telesa,  $\rho$  je hustota vody a  $g$  je gravitačné zrýchlenie. Môžeme si všimnúť, že vztlaková sila závisí len od objemu ponorenej časti telesa – čím väčší objem telesa je vo vode, tým väčšia vztlaková sila ho nadľahčuje.

Na teleso zároveň pôsobí gravitačná sila veľkosti  $mg$ . Teda čím ťažšie je teleso, tým väčšia gravitačná sila ho ťahá k zemi. Hmotnosť telesa môžeme vyjadriť ako  $V\rho_t$ , kde  $V$  je jeho objem a  $\rho_t$  je jeho hustota. Takže  $mg = V\rho_t g$ .

Porovnajme teraz tieto dve sily. Teleso padne na dno, ak bude nadľahčujúca vztlaková sila menšia ako gravitačná sila, ktorá ťahá teleso k zemi. To môžeme napísať takto:  $V\rho g < gV\rho_t$ . Po jednoduchej úprave dostávame, že  $\rho < \rho_t$ . Podobne, teleso bude plávať na hladine, ak vztlaková sila bude väčšia ako gravitačná, teda ak  $\rho > \rho_t$ .

Dôležitá vlastnosť telesa je preto **hustota**. Hranica, pod ktorou sa musia nachádzať uchádzači o plávanie na hladine (napr. polystyrén), je hustota vody, teda  $1000 \text{ kg/m}^3$ . Veci s väčšou hustotou (kamienky) sa potopia. Funguje to! Ešte sa zamyslíme nad nasledovným problémom: môžeme si všimnúť, že dutá plastová guľička pláva, zatiaľ čo rovnako veľká plná plastová guľička sa potopí. Prečo? Ved' obe guľičky sú z rovnakého materiálu, teda majú rovnakú hustotu!

Na niečo sme zabudli. Dutá guľička nie je len z plastu, jej vnútro je naplnené vzduchom, ktorý má veľmi malú hustotou. Nás zaujíma akási *priemerná* hustota telesa, a tá je v prípade dutej guľičky oveľa menšia ako v prípade plnej guľičky. Pekné vysvetlenie ponúka i porovnanie síl. Vztlaková sila nadľahčujúca guľičku, je rovnaká v oboch prípadoch, lebo guľičky majú rovnaký objem. Dutá plastová guľička je však zreteľne ľahšia ako plná. Preto gravitačná sila pôsobiaca na dutú guľičku je menšia.

Keď už sme dobre vyzbrojení dôležitým poznatkom o hustotách, vrhnime sa na vysvetlenie javu potápača. Vieme, že keď skúmavka pláva, musí byť priemerná hustota celej skúmavky (čiže skla, vzduchu a vody v skúmavke) menšia ako hustota vody. To sa dá ľahko dosiahnuť: sklo má síce väčšiu hustotu ako voda, no v skúmavke je okrem vody i vzduchová bublina. Keď fľašu stlačíme, skúmavka klesá ku dnu a teda sa nejako musela zväčšiť jej hustota. Ako však obyčajným stlačením fľaše dosiahneme, že skúmavka má zrazu väčšiu hustotu?

Ak ste si skúšali doma potápača vyrobiť, mohli ste si všimnúť jednu zaujímavú vec. Keď sa fľaša stlačí, vzduchová bublina v skúmavke sa zmenší. Prečo? Stláčaním fľaše znižujeme jej objem. Takže objem niečoho vo fľaši sa musel zmenšiť. Voda je skoro nestlačiteľná, takže svoj objem musel zmenšiť vzduch. Voda sa natlačila do skúmavky a chudáčiskovi vzduchu nechala len malý životný priestor.

V skúmavke sa zmenšil objem vzduchu a zväčšil objem vody, takže priemerná hustota skúmavky (čiže zase, skla, vzduchu a vody v skúmavke dokopy) narástla. Ak fľašu stlačíme dostatočne, hustota skúmavky prevýši hustotu vody a začne klesať ku dnu. Potápač dokáže byť citlivý aj na veľmi slabé stlačenie fľaše, pokiaľ je akurátne vybalancovaný – vzduchu nie je v skúmavke ani veľa, ani málo.