KOREŠPONDENČNÝ SEMINÁR UFO

vzorové riešenia 3. série
1.ročník
letný semester
školský rok 2007/2008
www.fks.sk/

UFO, KTFDF FMFI UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava
otazky@fks.sk

3.1 Metrová úloha (opravovali Palo, HAgO a Tinka)

Raz som bol v Prahe a tam majú metro a v ňom brutálne dlhé pohyblivé schody. Keď som sa nehybne postavil na začiatok schodov, trvalo celú minútu, než som sa doviezol na koniec. Keď som šiel tým istým schodiskom druhýkrát, schody boli akurát vypnuté a tak som musel ísť hore pešo (rovnomerným pohybom), čo mi zabralo dve minúty. Tretíkrát boli schody zase zapnuté, ale ja som sa ponáhľal a tak som po nich ešte navyše aj kráčal, rovnako rýchlo ako v druhom prípade. Koľko mi trval výstup?

Najprv by sme vás chceli pochváliť za to, ako perfektne ste zvládli tento príklad. Nedali ste nám skoro žiadnu šancu, aby sme sa prejavili ako zákerní opravovatelia a to je len dobre **J**. Občas sa stalo, že šiel nejaký ten bodík nadol, no tých prípadov naozaj nebolo veľa, bodaj by sa vám tak darilo aj v iných úlohách **J**.

Ale poďme k veci. Ako sa vlastne táto úloha mala riešiť? V zadaní nie je napísané, čo presne znamená „brutálne dlhé“ schody, označme si preto ich dĺžku nejako všeobecne – napríklad *s*. Táto vzdialenosť bude vo všetkých troch typoch výstupov nahor rovnaká – sú to predsa stále tie isté schody... Zo vzorca $v = s/t$, ktorý popisuje rýchlosť rovnomerného priamočiareho pohybu, si vyjadrime rýchlosť, ktorou idú schody a rýchlosť človeka, ktorý uteká po schodoch.

V prvom prípade, keď človiečik len nehybne stojí na schodoch, mu výstup trvá čas t_1=1min=60 s, čiže jeho rýchlosť bude

$$. \ v_1 = \frac{s}{t_1} = \frac{s}{60}\,\text{m/s}$$

V druhom prípade, keď schody lenivo postávajú a človek musí vybehnúť celú tu diaľku vlastnými silami, mu vylezenie až na vrchol schodov trvá t_2=2 min=120 s, čiže jeho rýchlosť bude

$$v_1 = \frac{s}{t_1} = \frac{s}{120}\,\text{m/s}\,.$$

Čo sa deje, keď človiečik beží po zapnutých schodoch? Obe zo spomínaných rýchlostí majú spoločnú jednu veľmi dôležitú vlastnosť a tou je ich smer. V oboch prípadoch ide človek hore po tých istých schodoch – čiže tým istým smerom. Preto, keď sa hýbu aj človek aj schody, môžeme rýchlosti jednoducho spočítať.

To znamená, že rýchlosť v treťom prípade je daná ako

$$v_3 = v_1 + v_2 = \frac{s}{60} + \frac{s}{120} = \frac{s}{40}\,\text{m/s}\,.$$

Zo vzorca $v = s/t$ si čas trvania rovnomerného priamočiareho pohybu vieme vyjadriť ako $t = s/t$. Čas výstupu v treťom prípade bude teda

$$t_3 = \frac{s}{v_3} = \frac{s}{\frac{s}{40}}\frac{m}{\frac{m}{s}} = 40s\,,$$

čo je správnym riešením tejto úlohy. **J**

A ešte pár slov o vašich najbežnejších chybách. Veľmi často ste nám počítali s konkrétne určenou dĺžkou schodov. A teda, nie je vôbec také jasné, prečo by to, čo vypočítame s jednou dĺžkou, malo platiť aj pre inú. Z nášho všeobecnejšieho prístupu vidno, že nakoniec sa nám práve tá dĺžka vykráti, teda na nej nezáleží. To ale bolo treba nejako zdôvodniť. Škoda stratených bodov. Taktiež by sa zišlo v popise zmieniť, prečo sčítavame rýchlosť schodov a človeka. Dobre to vystihuje nasledujúci prehovor do duše riešiteľa:

Začiatok prehovorenia do duše riešiteľa: Ono popis je brutálne dôležitý, ba priam najdôležitejší. Skúste mu venovať troška viac pozornosti oproti matematickým úpravám, aj keď sa v nich nedajbože zmýlite, správna myšlienka vám zaistí väčšinu bodov. *Koniec prehovorenia do duše riešiteľa.*

3.2 Ako odmerať pol litra vody? (opravovali Bzdušo a Halucinka)

A zase ideme merať a zase vodu. Tentoraz to ale bude o niečom úplne inom. Ako už zadanie napovedá, do nádoby treba namerať pol litra vody. K dispozícii máte štandardný vodovodný kohútik, litrovú nádobu nepravidelného tvaru (do nej chceme vodu načapovať), barometer, metrový kus koľajnice, presný teplomer, bravčové karé, kilometer tenkej veľmi pevnej nite, pravítko, železnú kocku asi o veľkosti zaťatej päste, stopky, Winetoua 1,2 a 3 v pevnej väzbe (dokopy 1000 strán), klavír a dva týždne času. Ako na to?

Tento príklad ste poňali veľmi kreatívne. Najprv si ukážeme správne riešenie a potom pár menej správnych ale kreatívnych riešení.

Pri správnom riešení sme použili iba stopky, štandardný vodovodný kohútik a nepravidelnú nádobu s objemom 1 liter. O štandardnom vodovodnom kohútiku vieme, že keď ho otvoríme, tak voda z neho bude tiecť rovnomerným prúdom, až kým ním znova nepohneme.

1. Otvoríme kohútik, vezmeme stopky a zmeriame čas t, za ktorý pri nami nastavenom prúde vody naplníme litrovú nádobu.
2. Uvedomme si, že keby sme vodu do nádoby púšťali len polovičný čas, tak napustíme len pol litra vody. To je spôsobené práve tým, že prietok (resp. prúd) vody sa nemení.
3. Vylejeme vodu z nádoby a budeme do nej znova napúšťať vodu, ale len t / 2 sekúnd. Voda musí tiecť takým istým prúdom ako predtým, takže je vhodné kohútikom medzitým nehýbať.
4. To už ale znamená, že v nádobe máme pol litra vody :).

Pár menej správnych ale kreatívnych riešení:

- Najvyužívanejšou súčasťou okrem kohútika bolo karé. Veľa z vás sa snažilo z karé vyrezať kocku s objemom 0,5 litra. Túto kocku dali do nádoby a zvyšok doplnili vodou. Vody v nádobe bolo zrejme 0,5 litra.[1] Keby aj karé malo dostatočné rozmery na vyrezanie kocky, predstava, ako niekto (pravítkom? niťou?) vyrezáva z karé kocku s presne určenými rozmermi, je vhodná tak do silvestrovského programu :).

---

[1] Príručka mladých fyzikov PRUDKO NEODPORÚČA požívať vodu, v ktorej sa máčalo bravčové karé.

- Ďalšie riešenie bolo podobné, len namiesto karé využívali kocku. Ponorili do naplnenej nádoby takú časť kocky (ktorú si pred tým pomocou pravítka vypočítali), aby vytieklo práve pol litra vody a pol litra im teda ostalo. Lenže aj tu bol problém a vlastne hneď niekoľko: Čo keby mala kocka objem menší ako 0,5 litra? Čo ak má nádoba úzke hrdlo? Viete si predstaviť pchať železnú kocku hrdlom fľaše?

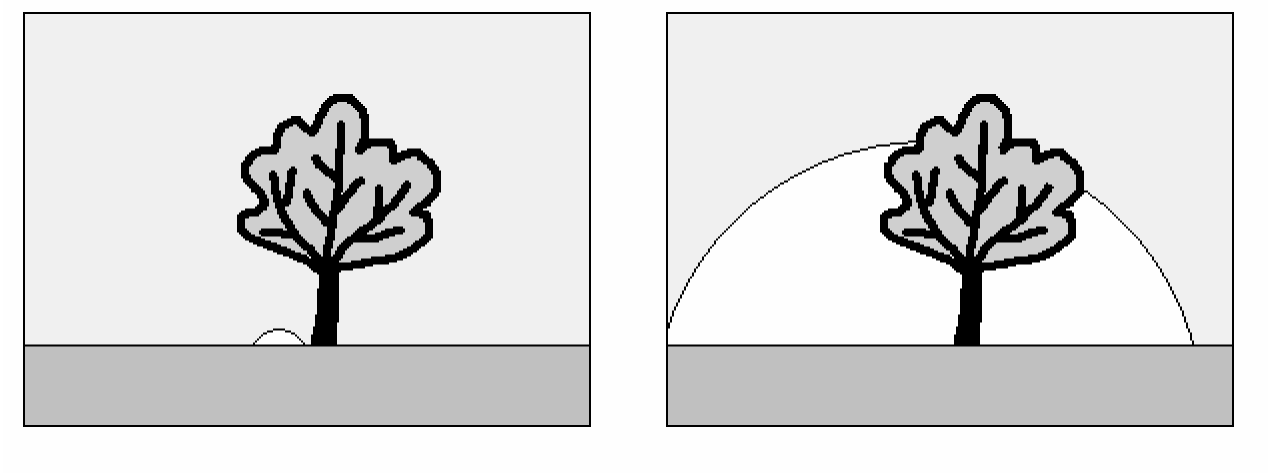
Komentár:
Veľa z vás prišlo na správne riešenie, ale občas v ňom boli malé muchy. Neodôvodnili ste, prečo sa za polovičný čas naplní nádoba do polovice. Bolo treba spomenúť rovnomerný prúd vody. Za to sme strhávali pol bodu. Častou chybou bolo zastavenie vody medzi napustením litra vody do nádoby a napustením pol litra do nádoby, pretože potom ste nevedeli znova presne nastaviť ten istý prúd vody. Za to sme tiež strhávali pol bodu. Kreatívne riešenia sme hodnotili individuálne. Avšak celkovo ste príklad zvládli. Najobľúbenejšie bolo aj tak karé :).

3.3 Samove fotky (opravovali Samo a Judita)

Samo je veľmi behavý človek. Rád beháva na dlhé trate a to najmä, keď má chuť behať. Minule však k svojmu koníčku pribral aj kus hazardu: Stavil sa s Juditou, že dobehne až k osamelému stromu na Dlhej lúke (taká veľmi dlhá lúka medzi Bratislavou a Viedňou) a že to stihne skôr, než úplne zapadne slnko. Aby si Judita overila, že Samuel si nevymýšľa, prikázala mu strom odfotiť, ideálne aj so zapadajúcim slnkom v pozadí. Keby to Samo stihol, fotka by mohla vyzerať nejako tak ako na obrázku. Samo bežal ako zmyslov zbavený, avšak strom bol ešte pol kilometra behu po rovnej lúke a slnko už povážlivo zapadalo. V ošiali za každú cenu stávku vyhrať vytiahol fotoaparát so svojím extra silným zoomom a „priblížil“ strom tak, aby bol veľký, ako keby bol odfotený z 20 metrov. Potom spokojne bežal za Juditou pochváliť sa svojím fotografickým dielom. Napriek všetkému snaženiu, jedna maličkosť jeho ohyzdný počin prezradila. Čo to bolo?

„No, Juditka, najbližší mesiac umývaš riad, upratuješ celé UFO a nosíš mi raňajky do postele, cha chá!“, podáva Judite fotku s víťazným úsmevom na tvári.
„Čože, ty si to stihol?“, ľaká sa Judita mesiaca domácich prác. „Nemožné, daj sem tú fotku, ty na mňa určite šiješ nejakú búdu“, skúma fotku ako policajný pes.
„Na večeru chcem buchty a zajtra na raňajky omeletu s klobásou“, začína si rozkazovať Samo, „a nezabudni – do postele!“
„Samko, vieš ty, čo sa robí s takými podvodníkmi a klamármi, ako si ty?“, pýta sa.
„Ehm – nosia sa im raňajky do postele?“, háda náš podvodník znervóznený nebezpečnou zmenou v tóne jej hlasu.
„Nie, vešajú sa do prievanu! Ty si myslíš, že som taká hlúpa a naivná, že ma oklameš, keď použiješ zoom?“, vyletúvajú z nej vyhrážky ako z vybuchujúcej sopky, „Zavesím ťa za nohy dole hlavou a budem ťa ukazovať na každej planéte ako najväčšieho podvodníka všetkých dôb!“
„Ako si to zis … ehm … to nie je pravda, to by si musela dokázať! Cha!“, snaží sa zachrániť Samko – luhár.
„To je jednoduché, milý môj“, usmieva sa nahnevaná ufónka, „dnes večer pôjdeme a odfotíme si západ slnka z dvadsiatich metrov a porovnáme s tvojou fotografiou. Potom sa uvidí!“
A tak sme šli k stromu a odfotili západ slnka. Samovi až potom došlo, kde je pes zakopaný, keď Judita vyvolala fotky[2]. Tu sú:

2 V dnešnej dobe digitálnych fotoaparátov si fotky dokáže vyvolať ktokoľvek.



Na fotke z 20 m vyzerá strom oveľa väčší ako slnko, avšak pri 500 m vzdialenosti je už slnko len o niečo menšie ako strom. Keby sme fotografovali z ešte väčšej vzdialenosti, bolo by dokonca na fotke väčšie. A toto sa žiadnym zoomom oklamať nedá.

„Juditka?“

„Áno, Samko?“

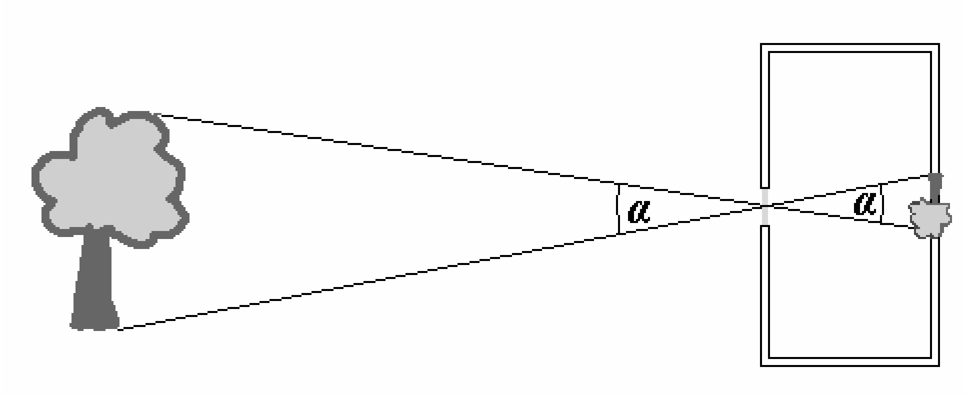
„Prepáč, prosím, že som sa ťa snažil oklamať! Už to nespravím. Nehnevaj sa, prosím! Budem upratovať UFO celý rok, ak mi odpustíš“, vraví Samo s pokorným pohľadom v očiach dúfajúc, že sa mu to u Judity podarí vyžehliť.

„A nezabudni na raňajky do postele!“ pripomína Judita.

„Dobre, dobre, ale ja stále nerozumiem tým fotkám“, vraví Samo, „prečo, keď sme blízko, tak bude na fotke strom väčší ako slnko, no keď sa vzdialime, je to naopak?“

Veru, prečo? Určite to zaujíma aj vás, milí riešitelia. Aby sme pochopili, prečo sa takáto zvláštna vec deje, musíme najskôr vedieť, ako fotografuje fotoaparát.

Lúče svetla vychádzajúce z predmetu, ktorý fotografujeme, prechádzajú cez šošovku a tam, kde dopadnú na film, tam sa film sfarbí. Keď chceme vedieť, kde sa nám na filme vytvorí obrázok stromu, stačí si nakresliť všetky lúče vychádzajúce zo stromu, ktoré idú cez šošovku a pozrieť sa, kde dopadnú na film. Tam, kde dopadnú, vznikne obrázok stromu.



Všimnime si, že veľkosť obrázku na filme závisí len od uhla, pod ktorým strom vidíme. Ak by sme boli od fotoaparátu dvakrát tak ďaleko, avšak mali aj dvakrát taký veľký strom, obrázok by sa nezmenil.

Aký teda bude rozdiel medzi fotkou z 500 m a fotkou z 20 m? Na fotke z 500 m bude strom 25 krát menší ako na fotke z 20 metrov. Prečo sa však nezmení aj veľkosť slnka? Prečo aj slnko nebude 25 krát menšie? Lebo od slnka sme sa nevzdialili 25 násobne. Uhol, pod ktorým vidíme slnko sa nezmenil, lebo slnko je od nás vzdialené približne 150 miliónov kilometrov, to je oveľa viac ako 500 metrov. Uhol, pod ktorým vidíme slnko, sa teda zmenil tak máličko, že si to ani nevšimneme.

Preto na oboch fotkách bude slnko rovnako veľké, ale na jednej bude strom 25 krát menší. Samo však použil zoom, ktorým fotku s malým stromom zväčšil, aby strom vyzeral rovnako veľký, ako keby ho fotografoval z 20 metrov. Chyba bola, že zabudol, že zoomom sa zväčšilo aj slnko, ktoré sa zväčšiť nemalo a to ho prezradilo.

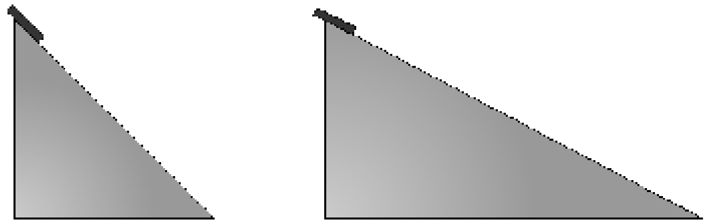
3.4 Babka k babce (opravovali Marika a Amálka)

Numismatik[3] Ámos si zohnal dve rôzne naklonené roviny, po ktorých sa jeho mince šmýkali úplne bez trenia. Vybral si z vrecka dva rovnaké grajciare. Potom ich na oboch rovinách spustil z rovnakej výšky nad úrovňou úpätia. V ktorej z vyobrazených situácií príde grajciar dole

a) za kratší čas

b) menšou rýchlosťou?

Odpoveď poriadne zdôvodnite!

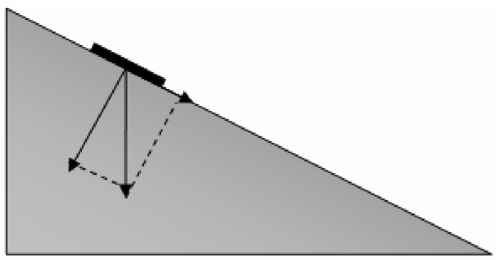


Milí naši!

Porátať pohyb na naklonenej rovine je úloha pre stredoškolákov, ale v tomto príklade si vystačíme aj s našimi vedomosťami. Krásne je totiž to, že k vysnívanému 5 bodovému riešeniu ste nič nemuseli rátať, stačilo sa len zamyslieť. Predstavme si experiment, pri ktorom by sme spustili dve mince *súčasne* z oboch naklonených rovín...

a) V ktorom prípade príde minca dole za kratší čas?

Minca na strmšej rovine bude mať väčšie zrýchlenie. Príde nám to celkom prirodzené a dá sa to aj jednoducho fyzikálne odôvodniť. Tiažovú silu mince $F = mg$ si môžeme rozložiť na dve na seba kolmé zložky (obrázok vpravo):



- Prvá: Kolmá na podložku, ktorá hovorí, ako veľmi je minca pritláčaná k podložke.
- Druhá: V smere podložky, ktorá hovorí, ako veľmi sa gravitácia snaží mincu rozpohybovať nadol po podložke.

Môžete sa presvedčiť, že čím strmší uhol zvolíme, tým väčšia je druhá zložka sily, a teda tým väčšie zrýchlenie minca získa. To znamená, že minca na strmšej podložke bude mať v každom okamihu väčšiu rýchlosť, a teda aj väčšiu prejdenú dráhu.

Ak si navyše uvedomíme skutočnosť, že tomu istému prevýšeniu zodpovedá pri strmšom uhle kratšia dráha, máme hneď dva dôvody toho, že **za kratší čas príde nadol minca na strmšej rovine**.

b) V ktorom prípade príde minca dole menšou rýchlosťou?

Tu máme dilemu. Zistili sme, že pri strmšej naklonenej rovine:

1.) ... minca má väčšie zrýchlenie, ale...

2.) ... pohyb trvá kratší čas, resp. zrýchľovanie potrvá menší čas.

Nevieme preto posúdiť, či príde minca dole väčšou rýchlosťou, lebo (1) alebo menšou, lebo me**dve**ď :). Nebolo by krásne, keby vyšla rýchlosť rovnaká bez ohľadu na strmosť roviny? Ono to tak naozaj vyjde a aby sme to dokázali, využijeme jeden skutočne krásny a užitočný

[3] Numis = Grécka bohyňa presného počítania s desatinnými číslami, Matik = matematik, človek zaoberajúci sa matematikou. Pozri tiež: intelektuál, idol žien, čávo, guru, makač, dávač, frájo, ohrozený živočíšny druh.

fyzikálny zákon: **Zákon zachovania energie** (ZZE). Energia je niečo nezničiteľné. Môže sa to iba premieňať z jednej formy na inú. (Zámerne sa vyhýbam otázke, čo to vlastne energia je. Tú ponechám na vás. :))

V našej úlohe sa mince kĺžu po podložkách úplne bez trenia, takže sa žiadna pohybová energia nemení na teplo. (Trením sa mení kinetická energia na teplo, preto si v zime šúchame ruky o seba.). ZZE sa tým zjednoduší na zachovanie súčtu polohovej a pohybovej energie.

Polohová energia $E = mgh$ závisí pre jeden druh mincí len od výšky *h*, pohybová energia $E = mv^2/2$ len od veľkosti rýchlosti. Pri našom experimente majú obe mince na začiatku rovnakú polohovú (sú v rovnakej výške) aj kinetickú ($v = 0$) energiu. Na dolnom konci roviny majú znova rovnako veľkú polohovú energiu (znova sú v rovnakej výške), musia preto mať aj rovnakú kinetickú energiu. To ale znamená, že **dole majú obe mince rovnako veľké rýchlosti**.

Koho by to zaujímalo viac, môže si skúsiť odvodiť, že rýchlosť, akou príde minca dole, nezávisí nielen na sklone, ale ani na hmotnosti mince a platí pre ňu vzťah $v = \sqrt{2gH}$, kde H je veľkosť prevýšenia. (Návod: Zo ZZE vyplýva, že úbytok potenciálnej energie mgH sa rovná získanej kinetickej energii $mv^2/2$.)