Fyzikálny korešpondenčný seminár
2. ročník, 2008/2009
UFO, KTFDF FMFI UK, Mlynská dolina, 84248 Bratislava
e-mail: otazky@fks.sk web: http://ufo.fks.sk

# Vzorové riešenia 2. kola zimnej časti 2008/2009

## 2.1 Slamky (opravovali — Marika a Samo)

Piť slamkou, to dokáže každý. Mal som takého spolužiaka, ktorý sa volal Marján a občas som ho úplne nechápal, ale ešte aj on to dokázal. Skúste však nasledujúci experiment: Dajte si slamky do úst dve, pričom iba jedna z nich skončí v nápoji, koniec druhej ostane voľne vo vzduchu. Dá sa takýmto spôsobom piť? Podeľte sa s nami o výsledky vášho experimentu. Prečo je to tak?

Ahojte!
Väčšina z vás správne zistila, že svoj smäd týmto spôsobom neuhasíte. Iní správne zistili, že svoj smäd týmto spôsobom uhasíte. Kto má pravdu? Všetci a nikto, poďme sa teda na to spoločne pozrieť.

Pitie slamkou, hlavne nasávanie, veľmi úzko súvisí s tlakmi, najmä tlakom vzduchu. A keďže tlak vzduchu je velice zaujímavá vec, rozhodli sme si naň bližšie posvietiť a vzorák začneme drobnou študijnou pasážov o plynoch. Kto si myslí, že má v tlakoch jasno a chce si rovno prečítať riešenie, môže túto pasáž preskočiť.

### Ako funguje tlak?

Vítame čitateľa, ktorý sa rozhodol načať púť za samovzdelávaním. V tejto časti vzoráku sa spoločne dozvieme, čo to ten tlak vzduchu je, odkiaľ sa berie a ako súvisí so satím.

Keby sme sa na vzduch pozreli lupou, všimli by sme si, že vyzerá ako množstvo malinkých pingpongových loptičiek, ktoré si poletujú prázdnym priestorom. Je ich síce veľmi veľa, no napriek tomu zaberajú zanedbateľnú časť priestoru, väčšina priestoru je zabratá ničím – vákuom. Keď máme vzduch zavretý v nádobe, jej steny sú neustále bombardované nárazmi od loptičiek – molekúl vzduchu[1]. Keďže nárazov molekúl do steny je veľmi veľa za krátky čas, vyzerá to, akoby na stenu pôsobila konštantná sila.[2]

Zamyslime sa teraz, ako súvisí sila, ktorou vzduch pôsobí na stenu nádoby, od jej plochy. Zrejme, čím bude plocha väčšia, tým viac molekúl nám dopadne na stenu za jednotku času. Keby sme plochu steny zdvojnásobili, počet molekúl dopadnutých za jednotku času by sa tiež zdvojnásobil. Pomer sily a plochy steny sa teda nemení, je konštantný. Ejha, ale tento pomer má aj svoje meno, zo školy si pamätáme, že ho zvykli volať tlak. Najväčšia nádoba, akú máme, je naša ľúbezná planéta Zem a mnohí už viete, že tlak v nej je

$$p_A \approx 100\,\mathrm{kPa}$$

a volá sa atmosférický.

[1] Označenie molekula vzduchu nie je úplne správne, keďže vzduch je tvorený zmesou rôznych plynov, čitateľ však určite chápe, čo máme na mysli.

[2] Skúste si na ruku sypať jemný štrk, budete mať pocit, že na vás pôsobí nejaká konštantná sila. V skutočnosti sa však bude jednať len o množstvo zrážok so zrniečkami štrku.

Seminár podporujú:
iuventa

Uvažujme ďalej, čo sa stane, keď z nádoby začneme odsávať vzduch (odoberať molekuly). Počet častíc v nádobe začne klesať, následkom čoho poklesne aj počet zrážok častíc so stenami nádoby, zníži sa sila pôsobiaca na steny nádoby, stručne povedané – klesne tlak. Ak sme v nádobe na začiatku mali atmosférický tlak, po odsávaní v nej bude tlak nižší (ale stále nejaký bude, všetko sa nám odsať nepodarí). Rozdiel medzi atmosférickým tlakom a tlakom v nádobe potom zvykneme volať podtlak, ak je v nádobe vyšší tlak ako je atmosférický, nazýva sa tento rozdiel pretlak. Príklad: Ak by bol v nádobe tlak 90 kPa, hovoríme, že je v nej podtlak 10 kPa. Naopak, ak by bol v nádobe tlak 110 kPa, hovoríme, že je v nej pretlak 10 kPa. Pozorný čitateľ si už určite všimol, že podtlak v nádobe nemôže byť väčší ako 100 kPa, pretože v žiadnej nádobe nemôže byť záporný tlak.

Teraz, keď sme získali nejaké teoretické vedomosti o tlaku, poďme ich skúsiť využiť v praxi. Predstavme si najskôr, že sa nám do slamky dostal valček hmotnosti $m$, ktorý ju celú upchal. Slamku nakloníme otvorom nadol, jeden koniec slamky si strčíme do úst a začneme sať. Zaujímalo by nás, aký malý tlak musíme v ústach vyvinúť, aby sme valček vsali do úst. V hornej časti slamky je tlak rovnaký ako v ústach, označme ho $p_\mathrm{u}$ v spodnej časti slamky je tlak rovnaký ako atmosférický. Ak je plocha podstavy valčeka $S$, na valček budú pôsobiť tri sily: tiažová sila $F_\mathrm{g}$, tlaková sila od vzduchu pod valčekom $F_\mathrm{A}$ a tlaková sila od vzduchu nad valčekom $F_\mathrm{u}$. Aby sme dokázali valček vysať, musí platiť:

$$\begin{aligned} F_\mathrm{g} + F_\mathrm{u} &< F_\mathrm{A} \\ mg &< S(p_\mathrm{A} - p_\mathrm{u}) \end{aligned}$$

Všimnime si, že keď vysajeme vzduch z úst, je to práve sila od vzduchu pod valčekom, ktorá tlačí valček nahor. Niektorí z vás sa mylne domnievali, že pri saní je predmet ťahaný do úst. To však nie je pravda, on je totiž práve naopak, tlačený silou vzduchu pod sebou! Ak označíme podtlak $\Delta p = p_\mathrm{A} - p_\mathrm{u}$, dostaneme:

$$mg < S\Delta p$$

Čo nám hovorí, aký veľký podtlak musíme v ústach dosiahnuť, aby sme dokázali valček vysať. Tým sme však práve vyriešili aj otázku pitia jednou slamkou, stačí si miesto valčeka predstaviť vodu, ktorá má, ako vieme, tiež svoju hmotnosť a tiež na ňu pôsobí tiažová sila.

### Pitie dvoma slamkami – konečne vzorák

Poďme teraz po obsiahlom teoretickom úvode konečne preskúmať, ako vyzerá pitie dvoma slamkami. A aby sme to mali zaujímavejšie, nenecháme druhú slamku voľne trčať vo vzduchu, ale ponoríme ju do oleja, ktorý má menšiu hustotu ako voda. O chvíľu pocítime mastnú chuť na jazyku, ale žiadnu vodu. Prečo je to tak?

Kľúčom k správnemu riešeniu bolo pozrieť sa na tlaky v oboch slamkách. V rovnovážnom stave sa tlak tesne pod hladinou vody v nádobe rovná atmosférickému tlaku. Keby to tak nebolo, na vodu by pôsobila výsledná nenulová sila a voda by sa musela pohybovať.

Podobná úvaha funguje aj pre druhú tekutinu. Zo školy poznáme vzťah na výpočet hydrostatického tlaku v hĺbke $h$ ako $h\rho g$. Na hladinu v slamkách pôsobí tlak vzduchu v ústach, ktorý je nižší ako atmosférický vďaka nášmu saciemu skillu. Výsledný tlak v slamke na úrovni hladiny v nádobe môžeme potom vypočítať ako súčet tlaku v ústach a hydrostatického tlaku v slamke. Z predošlej úvahy však vieme, že tento tlak sa musí v rovnovážnom stave rovnať atmosférickému. Získavame nasledovné rovnice:

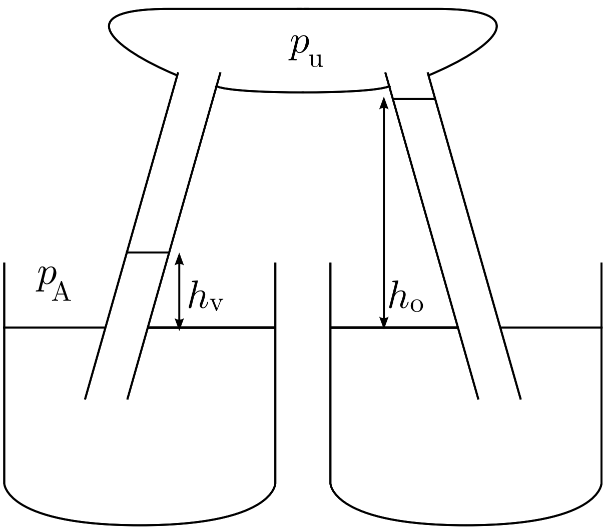
$$\begin{aligned} p_\mathrm{A} &= h_\mathrm{v}\rho_\mathrm{v}g + p_\mathrm{u} \\ p_\mathrm{A} &= h_\mathrm{o}\rho_\mathrm{o}g + p_\mathrm{u} \end{aligned}$$

Teda:

$$\begin{aligned} h_\mathrm{v}\rho_\mathrm{v}g &= h_\mathrm{o}\rho_\mathrm{o}g \\ h_\mathrm{v} &= \frac{\rho_\mathrm{o}}{\rho_\mathrm{v}}h_\mathrm{o} \end{aligned}$$

Avšak $\rho_\mathrm{o} < \rho_\mathrm{v}$, teda:

$$\begin{aligned} \frac{\rho_\mathrm{o}}{\rho_\mathrm{v}} &< 1 \\ h_\mathrm{v} &< h_\mathrm{o} \end{aligned}$$




Obr. 1: Sanie z dvoch slamiek súčasne

Čiže voda v prvej slamke dosiahne vždy nižšiu výšku ako olej v druhej slamke.Voda sa preto nikdy nedostane do našich úst, lebo výška oleja nemôže byť vyššia ako výška slamky. V prípade, že miesto oleja budeme cucať vzduch, výška vody v slamke bude malá – priam nepozorovateľná, lebo vzduch má tisíckrát menšiu hustotu ako voda.

Nám sa napriek tomu napiť podarilo – prudko sme začali ťahať z oboch slamiek. Chvíľku sme ťahali vzduch a potom sme zacítili trochu vody. A potom nám došiel dych...

Pred chvíľou sme ale povedali, že piť sa takto nedá. Kde sa stala chyba? Pri riešení sme predpokladali, že cucáme pomaly a stav je ustálený. Keď však prudko nasajeme, na krátku chvíľu poklesne tlak v ústach na dostatočne nízku hodnotu, pretože vzduchu chvíľku trvá, kým vystúpi slamkou hore. Počas toho sa k nám vie dostať trošku vody a nám sa podarí trochu sa napiť. Opakovaním tohto postupu dokážeme vypiť aj celý pohár, no je to veľmi prácne.

## 2.2 Rýchlik na 3. koľaji (opravovali — Kamila a Marcel)

Železničiar Jozef je tvor veľmi humorný a zvedavý ohľadom fyziky. Keďže si nemôže dovoliť veľký urýchľovač, kde by nechal zrážať častice, necháva zrážať sa aspoň vagóny. Na odstavenú koľaj rozostavil 20 vagónov, každý dlhý 30 metrov, tak, že medzi susednými vagónmi je vždy metrová medzera. Do takejto súpravy narazí ďalší, 21. vagón rýchlosťou 40 km/h. Vagóny sú rovnako ťažké a ich zrážky dokonale pružné, t.j. vagóny si pri nich vymenia svoje rýchlosti. Inými slovami, ak sa zrazí 40km/h vagón so stojacim, tak stojaci získa rýchlosť 40 km/h a narážajúci vagón zastane.

a) (3 body) Koľko času uplynie medzi prvým a posledným nárazom?

b) (2 body) Ako rýchlo sa „pohybuje náraz“ v takejto sústave? Aká maximálna rýchlosť sa dá docieliť vhodným zmenšením vzdialeností medzi vagónmi?

No poďme na to. Na úvod pripomeňme, že pre rovnomerný pohyb platí vzťah

$$s = vt$$

Teraz poriešme, čo sa vlastne deje pri tých nárazoch. Ide vagón s bravčovým karé, má rýchlosť 40 km/h, a zrazu picne do vagóna so soľou[3], ktorý mu akurát stál v ceste a mal rovnakú hmotnosť.

Povie mu: „Vieš čo, bráško, ja som už unavený, a ty si rovnaký ako ja, tak ja tu ostanem stáť a ty choď ďalej miesto mňa, predávam ti štafetu.“ Vagón so soľou sa spýta: „A akú máš rýchlosť?“ Vagón bravčového karé odvetí: „40 km/h.“ Vozne si vymenili rýchlosť. Vagón so soľou prejde 1 meter za čas

$$t = \frac{s}{v} = \frac{1\,\mathrm{m}}{40\,\mathrm{km/h}} \cdot \frac{3600\,\mathrm{s/h}}{1000\,\mathrm{m/km}}$$

a stretne ďalší vagón, (tento krát plný trojdielnych plaviek) a celý scenár sa zopakuje. Zopakuje sa 19krát – čo je vlastne počet metrových medzier medzi vagónmi. Pre celkový čas $t_c$ od prvého k poslednému nárazu preto treba vyššie spočítaný čas vynásobiť 19timi, teda

$$t_c = 19\frac{1\,\mathrm{m}}{40\,\mathrm{km/h}} \cdot \frac{3600\,\mathrm{s/h}}{1000\,\mathrm{m/km}} \approx 1{,}71\,\mathrm{s}^4$$

[3] Železničiar Jozef je beloch

[4] Keďže dráhu máme zadanú v metroch a čas by bolo najlepšie vyjadriť v sekundách, musíme si km/h premeniť na m/s. 1 km = 1000 m, preto treba danú hodnotu prenásobiť 1000. 1 h = 60 min =

Teraz sa ideme bližšie kuknúť, ako putujú tie nárazy. Prvý náraz sa objaví… a hneď zmizne. Ale zrazu, za čas $t$, sa objaví o pár metrov ďalej. Znova zmizne. Znovu sa objaví za ten istý čas (keďže vzdialenosti medzi vagónmi sú rovnaké) a o tú istú vzdialenosť ďalej (keďže vagóny sú navyše rovnako dlhé). Takto sa to opakuje až po posledný vagón. Vždy rovnaký čas, vždy rovnaká vzdialenosť. Náraz sa teda šíri *konštantnou*[5] rýchlosťou. Tú vypočítame keď predelíme prejdenú dráhu (vzdialenosť dvoch nárazov) prislúchajúcim časom (medzi dvoma nárazmi).

My využijeme fakt, že už poznáme čas 19 nárazov. Za tento čas prejde náraz dĺžku 19 vagónov a 19 medzier medzi nimi, tj.

$$s_\mathrm{c} = 19(30\,\mathrm{m} + 1\,\mathrm{m})$$

Rýchlosť nárazu

$$v_\mathrm{n} = \frac{s_\mathrm{c}}{t_\mathrm{c}} \approx \frac{19(30\,\mathrm{m} + 1\,\mathrm{m})}{1{,}71\,\mathrm{s} \approx 344\,\mathrm{m/s}}$$

čo je celkom dosť.

Zostáva otázka, ako túto rýchlosť čo najviac zväčšiť zmenšením vzdialeností medzi vagónmi. Ako sa môže rýchlosť zväčšovať? Pozrite si vzorec pre $v_\mathrm{n}$. Všimnete si, že ak tie vzdialenosti zmenším, tak zatiaľ čo prejdená dráha $s_\mathrm{c}$ sa len nenápadne zmenšuje, čas $t_\mathrm{c}$ sa veľmi rapídne približuje k nule. (To zasa vidno zo vzorca pre $t_\mathrm{c}$.) Delenie niečím malým dáva obrovské výsledky!

Prečo je to tak? Predstavte si, že sme medzery medzi vagónmi zmenšili 1000násobne na malú „milimetríkovú“. Vagóny medzi nárazmi musia prejsť 1000násobne menšiu dráhu, čo trvá 1000násobne kratší čas. Taký istý výsledok dostávame aj pre čas, za ktorý prejde náraz celou dĺžkou vlaku. A túto úvahu možno urobiť pre hocijaké väčšie číslo. Pritom dráha zostáva vždy aspoň 19,30 m – čo je „spoločná dĺžka vagónov“. Vidíme, že rýchlosť $v_\mathrm{n} = s_\mathrm{c}/t_\mathrm{c}$ môže byť ľubovoľne veľká.

Na záver spomeňme, že v skutočnosti to celkom takto nefunguje.[6] V skutočnosti nárazy trvajú tiež nejaký malý čas. Navyše si treba uvedomiť, že tak ako sú vagóny pospájané do vlaku, sú samotné atómy pospájané do vagónu a tie do seba musia tiež drgať. Napríklad, keď sa predná časť vagóna má dozvedieť, že zadná sa začala pohybovať. Rýchlosť tohoto drgania sa volá rýchlosť zvuku a pre oceľ je to asi 6 km/s.

Keby sme predpokladali, že vagóny sú pevné, nestlačiteľné telesá, vedeli by sme okamžite komunikovať s človekom akokoľvek vzdialeným. Natiahli by sme dosť dlhý vagón od

= 3600 s, (čas je v menovateli) takže to musíme predeliť 3600. Celkovo nám to teda vychádza, že hodnotu v km/h musíme predeliť 3,6 a dostaneme m/s. Druhý spôsob ako sa prebojovať cez premenu jednotiek a nezamotať sa, je si to rozpísať ako v našom vzorci (3600 sekúnd za hodinu a 1000 metrov na kilometer) a keď poškrtáme písmenká, ktoré sú tam dvojmo (h, m, km) dostaneme sekundy v čitateli a to sme presne chceli. Mimochodom, skontrolovať si, či sedia jednotky je jednou z najúčinnejších kontrol správnosti výsledku!

[5] Jazykové okienko: Konštantný = stály, rovnaký, nemenný.

[6] Ono také ako „pružná zrážka“ vlastne vôbec neexistuje. To si len fyzici vymysleli, aby sa im dobre rátalo.

odosielateľa k príjemcovi (napr. k susednej hviezde) a klepkali po ňom morzeovkou. Signály by tam boli hneď. To je však v spore so základným zákonom, že žiadna informácia nemôže ísť nadsvetelnou rýchlosťou. Ale to už sme odbočili moc ďaleko od témy, takže koniec.

## 2.3 Mokré jazero (opravovali — Paľo a Halucinka)

Náčelník Tvrdohlavá Čelenka narazil na obrovské jazero nepravideľného tvaru a rád by zistil, či sa v ňom nachádza dosť vody pre napojenie celej jeho rodiny. Jazero má špecifickú vlastnosť, žiadna voda doň nepriteká a žiadna voda z neho ani neodteká. Náčelník nedávno prepadol stádo belochov, preto má v inventári nasledovné predmety, ktoré môže použiť: vagón bravčového karé, vagón soli, rozbitý klavír, teplomer, vtáčie pero, pneumatika z traktora, pravítko, kružidlo, voltmeter, červený atrament, jedny trojdielne plavky, barometer, veľmi presné váhy, osciloskop, zdroj jednosmerného napätia, litrovú odmerku, týždeň času. Vodu z jazera nesmiete vyčerpať, pretože to je drahé, narušili by ste tým krásnu prírodnú scenériu, ohrozili rovnováhu živočíšnych druhov a naštvali susedný kmeň Apačov.

a) (4 body) Navrhnite, ako by mohol náčelník s využitím popísaných predmetov odmerať množstvo vody v jazere.

b) (1 bod) Navrhnutý spôsob vyskúšajte v praxi v menšom merítku. Môžete napríklad odmerať objem vody vo vašej vani.

Kde bolo tam bolo, bolo jedno bravčové karé, ktoré sa nerado kúpalo, teda ho nepoužijeme. Trojdielne plavky natiahneme na rozbitý klavír, aby bol odstrašujúci a postavíme ho ako barikádu pred nepriateľským kmeňom Nemám-Rád-Anastáza. Následne odvážime litrovú odmerku a potom ňou načrieme do vagóna plného soli tak, aby sme ju vytiahli úplne plnú (teda teraz v nej máme liter soli). Znova ju odvážime a odčítaním tejto hodnoty od hmotnosti prázdnej odmerky zistíme hmotnosť soli v odmerke – nech je to $m$. Teraz budeme postupne vysýpavať plné odmerky soli – teda vždy soľ hmotnosti $m$ – do jazera, nasypme ich tam $x$. Čiže sme do jazera spolu nasypali $x \cdot m$ gramov soli. Teraz počkáme také dva-tri dni, aby sa soľ poriadne rozpustila, teda aby v celom jazere bola aspoň približne rovnaká koncentrácia soli (=rovnakoslaná voda$\smile$). Potom si naberieme plnú odmerku vody a necháme z nej vypariť vodu (ešte nám predsa nejaký čas ostal$\smile$). Na dne nádobky nám zostane nejaké množstvo soli. Toto množstvo soli odvážime na váhach spôsobom ako na začiatku a dostaneme hmotnosť soli – označme si ju $s$ gramov. Teraz vieme, že v 1 litri vody je $s$ gramov soli. Nech je v jazere $V$ litrov vody. A teda vo $V$ litroch vody je $V \cdot s = x \cdot m$ gramov soli. To znamená, že objem vody v jazere je $V = \frac{x \cdot m}{s}$.

Veľa z vás skúšalo do toho zapojiť elektrinu. Nebola to zlá úvaha pokiaľ ste to dobre odôvodnili, čo sa bohužial ale často nestávalo. Za správne popísaný postup sme dávali 4 bodíky a za pokus 1 bodík. Často sa vám stávalo, že ste napísali pokus, ale neporovnali ste vašu hodnotu s reálnou hodnotou, takže sme nevedeli, či váš pokus bol úspešný. A ešte chcem povedať, že aj keď do jazera nepriteká a ani tam neodteka voda, tak to neznamená, že v jazere voda nemôže byť. Táto myšlienka tiež zmiatla nejakých z vás. Ešte chcem povedať, že ste to zvládli celkom dobre, a chválim vás za krásne obrázky indiánov. Ste skvelí$\ddot{\smile}$.

## 2.4 Hojdačka (opravovali — Aďa, Luc a Bzdušo)

Janko the Blond sa hojdá na hojdačke a rád by sa vyhojdol čo najvyššie. Za týmto účelom mu riskantne pomáha jeho kamarát Ďuro the Brave a to nasledovne. Vyšplhá sa na rebrík a keď je Janko najvyššie vzadu, prisadne k nemu na hojdačku a zvezie sa s ním do najnižšej polohy, kde sa hojdačky pustí (a druzgne na zem). Ako vysoko nad najnižší bod svojej dráhy vyletí Janko, ak bez Ďurovej pomoci by dosiahol maximálnu výšku $h$? Prečo je to tak?

Jo, ťažká úloha. Ale o tom to je, aby sme sa niečo naučili. Tak poďme rovno na vec. Začneme hneď zadaním. Ako sa napríklad zmieriť s tým, že nemáme zadanú výšku, z ktorej sa Janko spúšťa? A čo s tým, že nepoznáme hmotnosti kamarátov?

Prvý problém vyriešime ľahko. Podľa zadania by sa Janko na druhej strane prehúpol do výšky $h$, keby si k nemu „neprisadol“ Ďuro. Ale to by bolo obyčajné hojdanie sa. Jeho pohyb by sa ponášal na pohyb (ozaj veľkého, ale) kyvadla a zakaždým by sa dostával do výšky $h$. [7]

Druhý problém vyriešime tak, že hmotnosti si označíme ako $m_\mathrm{J}$ a $m_\mathrm{Ď}$ a budeme dúfať, že výsledok od nich nebude závisieť. V zadaní sa síce nespomínajú, no keď vo výpočtoch potrebujeme, prečo ich dáko neoznačiť a nezačať používať?

No a ešte sa dohodime, že spomínaná výška $h$ sa počíta od najnižšej polohy húpačky – vtedy nech je výška nulová.

Problémy sú vyriešené, zostáva len problém s názvom *Hojdačka*. Ako zlý vzorákopisec začnem rovno výsledkom. [8] Janko vyjde (opäť) do výšky $h$. Napriek tomu, že sa s ním pol cesty zviezol Ďuro. Ľaľa, naozaj to nezávisí na hmotnosti. No a prečo je to tak?

### Postup prvý – zákon zachovania energie

Pre tých, ktorí poznajú vzťahy pre kinetickú a potenciálnu energiu môžem veľmi stroho písať vzorce. Na začiatku majú chlapci potenciálnu energiu

$$E = (m_\mathrm{J} + m_\mathrm{Ď})gh$$

Zákon zachovania energie nám vraví, že v najnižšom bode (nulová výška) je celá táto energia premenená na kinetickú energiu, teda že

$$E = \frac{1}{2}(m_\mathrm{J} + m_\mathrm{Ď})v^2$$

[7] Samozrejme, je to dosť idealizovaný prípad. V skutočnosti by sa kvôli odporu vzduchu a treniu v závese hojdal čoraz menej, až by nakoniec celé hojdanie zastalo. Avšak za jeden kyv to nie je veľmi postrehnuteľné a nebudeme to uvažovať. Takže výška, z ktorej sa chlapci spúšťali, je celkom presne $h$.

[8] Ako dobrý vzorákopisec mám na to dobrý dôvod. Výsledok je totiž priam čarovne jednoduchý.

kde $v$ je rýchlosť chlapcov v najnižšej polohe. Odtiaľ možno ľahko dopočítať rýchlosť v najnižšej polohe. Vidíme, že

$$\begin{aligned} (m_\mathrm{J} + m_\mathrm{Ď})gh &= \frac{1}{2} m_\mathrm{J} + m_\mathrm{Ď} \\ gh &= \frac{1}{2} v^2 \\ v &= \sqrt{2gh} \end{aligned}$$

Keď sa Ďuro v najnižšej polohe pustí, ponechá si svoju rýchlosť a svoju kinetickú energiu. Rovnako tak aj Jano bude pokračovať v ceste svojou rýchlosťou a svojou kinetickou energiou. Jano má rýchlosť $v$ a jeho kinetická energia je

$$E_\mathrm{kin} = \frac{1}{2} m_\mathrm{J} v^2 = m_\mathrm{J} gh$$

Táto energia sa vystúpení do maximálnej výšky, označme ju $H$, zmení na potenciálnu energiu $E_\mathrm{pot} = m_\mathrm{J} gH$. Zákon zachovania energie dáva rovnosť

$$\begin{aligned} E_\mathrm{pot} &= E_\mathrm{kin} \\ m_\mathrm{J} gH &= m_\mathrm{J} gh \\ h &= H \end{aligned}$$

Ľaľa, výsledok. [9] No bolo to potrebné? Asi nie, keďže zďaleka nie všetci poznáte uvedená vzorce. Tak ako inak a *jednoduchšie* možno problém vyriešiť?

### Druhý postup – zdravý sedliacky rozum

Niet nadeň. Pre lepšiu predstavivosť budeme namiesto o hojdačkách hovoriť o kyvadlách. A povieme si jednu zaujímavosť:

Kyvadlá, ktoré sa od seba líšia len hmotnosťou závesu, sa pohybujú rovnako.

No tušili ste to? Dôvod je jednoduchý. Predstavte si dve rovnaké kyvadlá so závesom hmotnosti $m$. Obe ich rovnako vychýlime. Sú rovnaké, tak sa určite budú pohybovať rovnako. Keby sme ich spojili pevnou paličkou, naďalej by sa pohybovali rovnako. No ale to je predsa kyvadlo so závesom $2m$. Pohybuje sa rovnako ako so závesom $m$. Je jasné, ako možno ukázať, že pohyb bude rovnaký pre každý násobok hmotnosti $m$. Ak zvolíme $m$ dosť malé, tak pokryjeme prakticky celú škálu hmotností. [10]

No a teraz si predstavte, že mám kyvadlo, ktorého nejaký *kus* môže odpadnúť[11] Vieme, že pohyb kyvadla nezávisí od hmotnosti. Keď sa kyvadlo rozpohybuje a tento *kus* opadne,

[9] Skúste vymyslieť vetu s čo najviac písmenami ľ. Ja začnem: *Ľaľa, teľa váľa sa v dateline.* Kto dá viac? $\ddot\smile$

[10] Skúste popremýšľať nad tým, ako možno podobným spôsobom odôvodniť, že všetky telesá padajú s rovnakým gravitačným zrýchlením.

[11] Napríklad tak, že na počítači stlačíme enter. Alebo odhrdzavie vekom. Alebo je na ňom malý škriatok ktorý sa o všetko postará za nás. Realizácií je nespočet.

tak zvyšok kyvadla má rovnakú rýchlosť, akoby od začiatku išlo bez tohoto kusu. (Veď sme sa už dohodli, že pohyb kyvadla nezávisí na hmotnosti závesu.) A teda pohyb dokončí tiež úplne rovnako. Vyjde do rovnakej výšky, v akej začínalo.

A že čo s tými má Jano, Ďuro a hojdačka? Spolu sú tým kyvadlom na začiatku a Ďuro je ten odpadnutý *kus*. Takto sme k riešeniu prišli bez výpočtov a úplne prirodzene. Jano vyjde do rovnakej výšky, z akej sa na začiatku spolu spúšťali.

Mimochodom, upozorním vás ešte na jednu vec. Svet okolo nás je už raz taký. Ak sa raz nejaký systém nachádza v danom *stave*, tak ďalšie správanie sa tohoto systému nás nezaujíma, ako sa do daného *stavu* dostal. Zaujíma nás *len stav*. Napríklad v našej úlohe sme sa vôbec nezamýšľali nad tým, ako sa Ďuro dostal k Janovi na hojdačku – Či tam bol od začiatku alebo práve priskočil. Podstatné pre nás bolo, že na začiatku mali nulovú rýchlosť a boli vo výške $h$.