Fyzikálny korešpondenčný seminár
2. ročník, 2008/2009
UFO, KTFDF FMFI UK, Mlynská dolina, 84248 Bratislava
e-mail: otazky@fks.sk web: http://ufo.fks.sk

Vzorové riešenia 3. kola zimnej časti 2008/2009

3.1 Spotrebná úloha (opravovali — Halucinka a Paľo, vzorák Tomáš a Halucinka)

Kamoš má také super auto, ktoré má namakaný digitálny displej, kde mu ukazuje všetky možné údaje, ktoré by ho mohli zaujímať: Ako rýchlo ide, aké sú otáčky motora, koľko ľudí je v aute a akého sú pohlavia, kde stojí najbližšia policajná hliadka, v akom okruhu sa nenachádza štýlovejšie auto ako to jeho a mnohé iné. Zaujímavý je údaj o spotrebe. Keď auto stálo, no motor šiel na voľnobeh, na displeji svietila spotreba $0{,}5$ litra za hodinu. Keď sme sa pohli rovnomerným pohybom z mierneho kopca, pričom sme šli stále na voľnobeh (čiže motor pracoval rovnako ako pri státí) domýšľavá elektronika spotrebu okamžite prerátala a na palubnej doske zasvietil údaj 1 liter na $100\,\mathrm{km}$. Ako rýchlo sme išli z kopca?

Iste všetci uznáme, že mať takéto auto je neuveriteľne praktické. Ako sa píše v zadaní, auto v oboch prípadoch pracuje s rovnakým výkonom, a má teda rovnakú spotrebu (na čas). Podľa zadania je táto spotreba 0,5 litra za hodinu.

V druhom prípade máme rovnakú spotrebu vyjadrenú ako 1 liter na $100\,\mathrm{km}$ – pomocou *dráhy*. Ak označíme rýchlosť auta ako v, tak tých $100\,\mathrm{km}$ by prešlo za čas $100\,\mathrm{km}/v$. Toto je teda *čas*, za ktorý auto minie 1 liter benzínu.

Máme teda jednu a tú istú spotrebu vyjadrenú dvoma spôsobmi a nič nám nebráni dať ich do rovnosti

$$\frac{0{,}5\,\mathrm{l}}{1\,\mathrm{h}} = \frac{1\,\mathrm{l}}{\frac{100\,\mathrm{km}}{v}}$$

a vyjadriť z nej

$$v = \frac{0{,}5\,\mathrm{l}}{1\,\mathrm{h}} \cdot \frac{100\,\mathrm{km}}{1\,\mathrm{l}} = 50\,\mathrm{km/h}$$

Celé sa to dalo povedať aj jednoduchšie:

Keď auto stojí, spotrebu má 0,5 litra za hodinu. Teraz ak by auto prešlo dole kopcom rovnomerným pohybom $100\,\mathrm{km}$, podľa palubnej dosky by minulo 1 liter. Pritom sa spotreba nezmenila, takže túto dráhu muselo prejsť za 2 hodiny. Odtiaľ už hneď vidíme, že rýchlosť auta bola

$$v = \frac{100\,\mathrm{km}}{2\,\mathrm{h}} = 50\,\mathrm{km/h}$$

Komentár:

Veľmi ste nás všetci potešili. Riešenia boli skoro všetky vynikajúce. Najväčší problém vám robilo pochopiť zadanie. Keď ste ho už pochopili, tak ste sa raz – dva dostali k výsledku. Sme radi, že vám toto zadanie nakoniec nerobilo problém (ste jednoducho dobrí⌣̈), avšak mierna výčitka z našej stany poputuje tým, čo veľmi nepopísali, čo spravili. Stačí jedna – dve vety na objasnenie toho, ako ste sa dostali k výsledku. Hlavne nech je vaše riešenie aspoň trošku zrozumiteľné pre nás. Tešíme sa na vás v lete. Majte sa krásne!

3.2 Človek na vážkach (opravovali — Maťo a Lenka)

Môj kamarát a umelec Braňuško, ktorý si od samej práce nevedel nájsť čas na šport, mal v poslednej dobe čoraz výraznejšie problémy s nadváhou. Preto sa potešil, keď si v časopise *The Eating Habits* prečítal článok o tom, ako zo seba zhodiť nejaké tie kilogramy navyše. Pointa zhadzovania kilogramov je nasledovná: Vezme dvojo váh a ľahkú, pevnú konštrukciu a postaví sa na ne podľa obrázku.

a) (2,5 boda) Akú hmotnosť si Braňuško prečíta na váhach, ktoré sa k nemu nachádzajú bližšie?

b) (2,5 boda) Kam sa má postaviť, ak chce „zhodiť“ 20 kg, teda, ak chce, aby k nemu bližšia váha ukázala o 20 kg menej?

Rátajte si tým, že Braňuško je tažký umelec, váži presne 100 kg.

Má to ten huncút Braňuško ale dobre vymyslené! Väčšina z Vás dokonca prišla na to, ako presne to má mať všetko vymyslené, napr. využitím svojej (ženskej) intuície.

Nuže, skúsme pozorne počúvať, čo všetko nám takáto intuícia napovie. Napríklad by sme jej mohli uveriť, že súčet hmotností, ktoré sa nám ukážu na váhach 1 a 2, bude rovnaký, ako je hmotnosť samotného ťažkého umelca Braňuška[1] (hmotnosť ľahkej konštrukcie zanedbáme). Ak Braňuško váži $m = 100\,\mathrm{kg}$, potom súčet hmotností, ktoré ukazuje prvá váha (m_1) a druhá váha (m_2), je m:

$$m_1 + m_2 = m = 100\,\mathrm{kg}$$

Ako druhé nám môže pošuškať do uška, že čím bližšie je ťažký umelec k jednej z váh, tým väčšiu hmotnosť nám ukáže.[2] Mimochodom, všimnite si, že Braňuško si na bližšej z váh môže prečítať vždy len hmotnosť väčšiu ako polovica jeho váhy!

Používajme naďalej našu intuíciu: Ak si Braňuška postavíme do stredu veľmi ľahkej konštrukcie, celá situácia je symetrická a obe váhy budú zaťažené rovnako. Obe váhy ukážu $m/2$. Keď si svojho obľúbeného umelca postavíme priamo nad niektorú z váh, tak táto váha bude ukazovať celú jeho hmotnosť m. Druhá váha vtedy ukáže nulovú záťaž.

Čo však, ak stojí niekde inde? Pokiaľ si spomeniete na rovnováhu síl na páke, možno bez väčšieho rozmýšľania napíšete rovnicu

$$m_1 a_1 = m_2 a_2$$

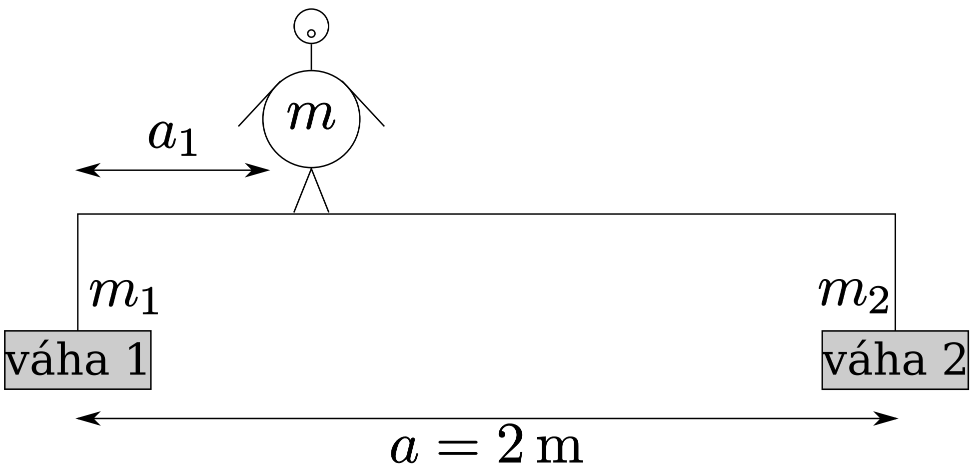
kde ako $a_{1,2}$ sme označili jeho vzdialenosť od oboch váh. Zrejme

$$a_1 + a_2 = a = 2\,\mathrm{m}$$

[1] Zo skúsenosti viete, že keď sa dvoma nohami postavíte na váhu, tak jedna noha tlačí, druhá noha tlačí a dokopy tlačia presne vašou tiažou. S dvoma rôznymi váhami je to podobné.

[2] Keďže súčet hmotností na váhach je vždy rovnaký, tak hmotnosť na váhe, od ktorej sa umelec vzdiali, sa zmenší.

Lenže na prvý pohľad tam páku nie je vôbec vidno. *Tak prečo táto rovnosť platí?*



Obr. 1: Braňuško na váhach

Predstavme si na chvíľu, že systém váh je zostrojený tak, že doska sa môže otáčať okolo osi nad prvou váhou[3] a na druhej váhe je položená. Takáto doska už naozaj *je* pákou. Braňuško ju zatláča nadol momentom sily $M = mga_1$ a váha 2 ju odtláča nahor momentom sily $M_2 = m_2ga$.[4] Tieto dva momenty síl sú v rovnováhe, takže musí platiť

$$\begin{aligned} M &= M_2 \\ mga_1 &= m_2ga \\ m_1ga_1 + m_2ga_1 &= m_2ga_1 + m_2ga_2 \\ m_1a_1 &= m_2a_2 \end{aligned}$$

Mimochodom, skúste si ten istý výsledok dokázať za predpokladu, že doska sa otáča okolo druhej váhy. Znovu dostanete túto rovnosť. A dostali by ste ju, aj keby ste si za bod otáčania zvolili hocijaký iný bod dosky – napríklad ten, na ktorom stojí Braňuško. Vtedy dostávame túto rovnicu priamo.

Keď už všetci veríme, že tam naozaj *máme* páku, môžeme rovnicu smelo používať. Mimochodom, všimnite si, že pri dôkaze rovnosti nám hneď v druhom riadku vyšla iná užitočná rovnica

$$ma_1 = m_2a$$

a zo symetrie (je na nás, ktorú váhu označíme číslom 1 a ktorú číslom 2) tiež

$$ma_2 = m_1a$$

[3]To nie je zlá predstava. Veď doska položená na drsnej podložke sa dá okolo svojej hrany susediacej so zemou jednoducho otáčať.

[4]Podľa zákona akcie a reakcie je každé silové pôsobenie dvoch telies vzájomné. My sme teraz využili skutočnosť, že akou silou tlačí doska na váhu, takou silou tlačí aj váha na dosku (ale opačným smerom) – teda silou m_2g.

Využitím predposlednej rovnice pre $a_1 = 0{,}5\,\mathrm{m}$ a $m = 100\,\mathrm{kg}$ dostávame

$$m_2 = m\frac{a_2}{a} = \frac{100\,\mathrm{kg}}{4} = 25\,\mathrm{kg}$$

a teda $m_1 = m – m_2 = 75\,\mathrm{kg}$ a to si aj Braňuško v prvej časti našej úlohy na *bližšej* váhe prečíta.

Keby chcel zhodiť presne 20 kg zo svojej ťažkej umeleckej hmotnosti (100 kg), musel by svoju váhu rozložiť tak, aby $m_1 = 80\,\mathrm{kg}$ a $m_2 = 20\,\mathrm{kg}$. Z tej istej rovnice ako v predošlom prípade dostávame $a_1 = a\frac{m_2}{m} = 0{,}4\,\mathrm{m}$.

K hodnoteniu hádam len toľko, že ak ste použité rovnice nevysvetlili, musíte sa uspokojiť s najviac štyrmi bodíkmi.

3.3 Pasta (opravovali — Judita a Aďa)

Jedlo s vodou je základ života. Ale i zubného kazu! A aby ste získali lepší odhad, kedy budete musieť najbližšie zájsť do obchodu, skúste odhadnúť, aký dlhý pás zubnej pasty sa dá vytlačiť z nepoužitej 75 mililitrovej tuby zubnej pasty *Odol Herbal*.

K vyriešeniu tejto úlohy si stačilo položiť jednu základnú otázku. Čo sa stane s pastou, keď prejde kruhovým otvorom tuby, v ktorej je uložená? Ako sa mnohí z vás správne dovtípili, sformuje sa do podoby valca. A čo o tomto valci vieme?

Za predpokladu, že vytlačíme všetku, ale naozaj úplne všetku pastu, poznáme jeho objem. Podľa zadania máme totiž $75\,\mathrm{ml} = 75\,\mathrm{cm}^3$ pasty. Tento údaj nám ale na výpočet nestačí. My však o tomto valci vieme ešte niečo! Že čo? No veď čo má pás tvaru valca, ktorý nám každý deň tróni na zubnej kefke, spoločné s tubou, z ktorej je vylovený? Keďže vznikajúci valcovitý pás je tvarovaný otvorom tuby, budú mať tieto zrejme rovnaký kruhový prierez.

Tu nastáva kameň úrazu. Vnútorný priemer otvoru sa vo vašich riešeniach neuveriteľne líši. To by človek neveril, že tá istá pasta môže mať priemer od 0,5 cm až po 1 cm. Pritom práve tu si veľké nepresnosti dovoliť *nemôžeme.* [5] V takom prípade je dobré meranie viackrát zopakovať a z nameraných hodnôt vypočítať priemer. My sme tak učinili posuvným meradlom[6] a vyšlo nám, že vnútorný priemer otvoru tuby je dostatočne presne $d = 0{,}75\,\mathrm{cm}$.

Čo s tým? Vieme, že pre objem valca platí vzťah $V = S_p l$, kde S_p je obsah kruhového prierezu (podstavy) valca – $S_p = \pi d^2/4$ a l jeho dĺžka – to, čo chceme zistiť. Úpravou týchto rovníc dostávame

$$l = \frac{V}{S_p} = \frac{V}{\pi\frac{d^2}{4}} = \frac{4V}{\pi d^2},$$

čo po dosadení číselných hodnôt dáva hľadanú dĺžku $l \approx 170\,\mathrm{cm}$.

[5] Ak s presnosťou na ±1 mm zmeriam dlhú tyč, meranie je veľmi presné. Ak ale s presnosťou na ±1 mm zmeriam predmet „milimetrových“ rozmerov (napr. 5 mm), chyba je obrovská (v danom prípade napr. ±20 %). Takúto nepresnosť môžeme očakávať aj vo výsledku výpočtu, v ktorom sme nepresnú hodnotu dĺžky použili.

[6] Bežné posuvné meradlo meria s presnosťou na desatiny milimetra.

Tento výsledok však celkom nezodpovedá skutočnosti. Pri jeho výpočte sme nemysleli na dve veci:

1. Počítali sme s tým, že sme z tuby vytlačili úplne všetku pastu. To však nie je pravda, pretože na jej stenách vždy zostanú nejaké tie zvyšky (ich množstvo závisí od voľby stratégie pri vytláčaní ◡̈). To znamená, že náš pás bude mať v skutočnosti o niečo menšiu dĺžku. To ale stále nemusí byť pravda, pretože...

2. Keď pastu vytláčame na podložku, pasta sa o ňu zachytáva.[7] Keď rýchlosť vytláčania pasty a rýchlosť, ktorou hýbeme tubu pri vytláčaní nezvolíme optimálne, bude sa náš valec deformovať (bude natiahnutý alebo stlačený). Objem pasty je ale stále ten istý. To znamená, že z tuby vieme vytlačiť aj dlhší (ale tenší), aj kratší (ale hrubší) pás, než sme vypočítali. Náš výsledok, je teda akási „priemerná“ hodnota.

K vašim riešeniam:

Mnohí z vás prišli na správne riešenie, ale zle si odmerali priemer pasty. Za to sme strhávali pol bod. Tak isto sme strhli pol bodu, ak ste použili inú pastu, než sa spomína v zadaní, pretože sme nemali možnosť si overiť presnosť vášho merania. Zadanie bolo jasné a druh pasty, s ktorou bolo treba pracovať, sa nemal odignorovať. Napokon, 5bodové riešenie by malo obsahovať aj nepresnosti, ktorých sme sa pri riešení dopustili. Ak tam chýbali, aj za to šli dole nejaké polbodíky.

3.4 Veverica (opravovali — Marika a Samo)

Každú jeseň chodíme celá rodinka na chatu na vidiek. A nebudete mi veriť, ale náš sused je schizofrenik. Raz napríklad doobeda pozbieral orechy a hneď poobede, keď už žiadne nevedel nájsť, nadobudol presvedčenie, že mu ich pokradli veveričky. Vyliezol na strom do trojmetrovej výšky a začal striehnuť s polkilovým okozubom v ruke. Po nejakom čase z diery v strome vyliezla veverica a začala bežať rýchlosťou v *rovnomerne priamočiaro* od stromu. V tom istom momente hádže sused okozubom. Akou rýchlosťou u ho má hodiť, ak chce vevericu trafiť a ak hádže pod uhlom 45° nadol? Odpoveď poriadne zdôvodni.

Milí naši ufáci, okozuby sú zákerné vecičky a aj tento príklad bol zákerný. Väčšina z vás pri riešení tohto príkladu zabudla na tetu gravitáciu a neuvedomila si, že okozub sa nebude pohybovať po priamke[8]

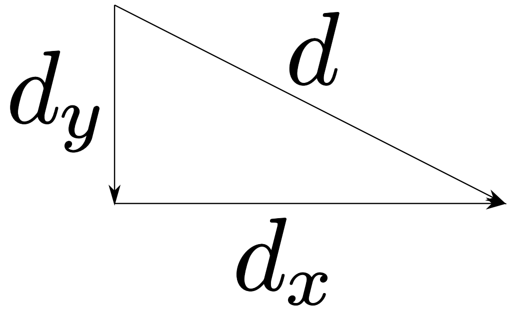
Skôr, než sa pustíme do riešenia samotného príkladu, naučíme sa jednu fintu – pozrieme sa, ako sa dá rýchlosť telesa rozložiť na viacero častí. Všimnime si, že keď sa teleso pohne šikmo o vzdialenosť d, dostane sa na to isté miesto, ako keby sa najskôr pohlo vodorovne o vzdialenosť d_x a potom zvislo o vzdialenosť d_y, ako je naznačené na obrázku 2. No a keďže d_x a d_y sú na seba kolmé, musí platiť Pytagorova veta:

$$d_x^2 + d_y^2 = d^2$$

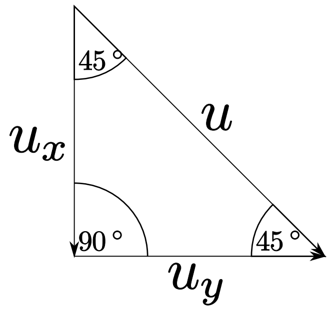
[7] Praktická realizácia so sebou často prináša problémy.
[8] Krivka, po ktorej sa okozub pohybuje, sa volá parabola.

Vidíme, že namiesto toho, aby sme sa na teleso pozerali ako na niečo, čo sa pohlo šikmo, môže byť často jednoduchšie tváriť sa, že sa pohlo o nejaký kus vo vodorovnom smere a o nejaký kus v zvislom smere. Rovnaký prístup sa dá použiť aj pri rýchlostiach. Predpokladajme, že sa naše teleso pohybuje rýchlosťou v rovnakým smerom ako v predošlom prípade a že za nejaký čas t prejde už spomínanú dráhu d. My už vieme, že je to to isté, ako keby prešlo vodorovne dráhu d_x a zvislo dráhu d_y. Nič nám však nebráni označiť si $v_x = \frac{d_x}{t}$ a $v_y = \frac{d_y}{t}$. A, ejha, finta! Zrazu vidíme, že miesto toho, aby sme hovorili, že teleso sa hýbe šikmo rýchlosťou v môžeme rovnako dobre tvrdiť, že sa hýbe rýchlosťou v_x vo vodorovnom smere a rýchlosťou v_y v zvislom smere. Šikovný riešiteľ si ešte premyslí, prečo musí Pytagorova veta platiť aj pre rýchlosti, teda že platí:

$$v_x^2 + v_y^2 = v^2$$



Obr. 2: Rozklad posunutí



Obr. 3: Trojuholník rýchlostí

Ešte sa pozrime, ako ovplyvňuje sila pohyb vecí (nielen gravitačná, nielen okozubov). Najjednoduchší prípad je, keď na začiatku teleso stojí v pokoji. Vtedy sa začne pohybovať v smere, akým pôsobí sila a postupne naberá stále väčšiu a väčšiu rýchlosť. Veľmi podobne to vyzerá, keď sila pôsobí v rovnakom smere, ako je smer pohybu telesa na začiatku – teleso sa pohybuje ďalej, ale jeho rýchlosť sa zväčšuje. Ak sa teleso na začiatku hýbalo presne opačným smerom, ako pôsobí sila, bude spomaľovať, kým sa nezastaví a potom sa opäť rozbehne v smere pôsobenia sily. Ak však smer pohybu telesa nie je rovnobežný s pôsobiacou silou, situácia sa trošku komplikuje. Aby sme mohli popísať jeho pohyb, musíme najskôr rýchlosť rozložiť na zložku, ktorá ma rovnaký smer ako pôsobiaca sila a na zložku, ktorá je na silu kolmá. A dozvedáme sa (celkom intuitívny) fakt, že rovnobežná zložka rýchlosti bude ovplyvnená silou tak, ako v predošlých prípadoch[9] zložka rýchlosti, ktorá bola kolmá na silu nebude silou vôbec nijako ovplyvnená! Toto je veľmi dôležitý poznatok, pretože nám umožňuje jednoducho popisovať inak zložitý pohyb telesa, na ktoré pôsobí sila. Stačí, keď jeho pohyb rozdelíme na pohyb v smere kolmom na silu a pohyb v smere rovnobežnom s pôsobiacou silou.

[9] Presnejšie sa dá povedať, že sila udeľuje telesu zrýchlenie veľkosti $a = F/m$. Pre kilogramové teleso, na ktoré pôsobí sila 1 N to znamená, že každú sekundu sa mu rýchlosť zväčší o 1 m/s.

Teraz, keď už vieme, ako sila ovplyvňuje pohyb okozubu, môžeme sa pustiť do riešenia úlohy zo zadania. To, že okozub trafí vevericu, znamená, že budú v rovnakom čase na rovnakom mieste. Keďže sused hodil okozub vtedy, keď veverica vyštartovala, čas letu okozubu a čas behu veverice budú rovnaké. O dráhach sa to už povedať nedá, vieme ale, že budú oba na zemi, rovnako ďaleko od stromu. Na let okozubu sa nám preto bude lepšie pozerať, keď budeme zisťovať iba to, ako sa posúval vo vodorovnom a zvislom smere.

Najprv rýchlo vybavme zvislý smer. Keďže hádžeme smerom nadol, na začiatku v ňom okozub nejakú tú rýchlosť už má. A ako každá vec, čo má hmotnosť, aj on padá. Z vlastnej skúsenosti a toho, čo sme už o sile povedali, viete, že nepadá rovnomerne, ale zrýchľuje. Nemusí nás trápiť, ako presne vyzerá pohyb vo zvislom smere, dôležité je, že v tomto smere sa nepohybuje rovnomerne, čo ste si mnohí nevšimli.

Vodorovný smer je o niečo krajší. Ľahko si môžeme všimnúť, že okozub musí mať vodorovnú zložku rýchlosti rovnú rýchlosti veverice. Keby bola jeho vodorovná zložka rýchlosti väčšia, tieň, ktorý vrhá na zem (je práve pravé poludnie) by čoskoro predbehol vevericu a keďže okozub nemôže dopadnúť mimo svoj tieň[10], nemohol by ani okozub trafiť veveričku. Prečo nemôže byť rýchlosť okozubu menšia, si rozmyslite na domácu úlohu! Ak označíme vodorovnú zložku rýchlosti okozubu u_x, môžeme zistený poznatok zapísať rovnicou:

$$u_x = v$$

Posledná vec, ktorú musíme urobiť je zistiť, aké musí byť u, keď poznáme u_x. A tu prichádza na rad trojuholník, ktorý nakreslilo asi 90 % z vás (obrázok 3). Takto vyzerajú rýchlosti tesne po hodení okozubu, ako letí, tak u_y narastá a uhol 45 ° sa pokazí, ale to nás nemusí trápiť. Z Pytagorovej vety, vďaka tomu že trojuholník so 45°uhlom je rovnoramenný dostávame:

$$v^2 + v^2 = u^2$$

$$u = \sqrt{2v} \approx 1{,}4v \;^{11}$$

K tomuto výsledku prišla väčšina z vás. Žiaľ, museli sme strhnúť polovicu bodov za nesprávny postup. Poučenie je, že vo fyzike sa treba zaujímať hlavne o to, čo sa deje okolo nás a nie len o vzorce zo školy $\ddot\smile$

[10]Predstavte si tú srandu, sedíte na zemi a váš tieň si sedí desať metrov vedľa

[11]a to sa dá napísať aj ako $\frac{1}{\cos 45°}$