

Vzorové riešenia 2. kola letnej časti 2008/2009

2.1 Titanik (opravovali — Pafo a Bzdušo)

Halucinka je veľký fanúšik Titaniku. Keďže model v skutočnej veľkosti by sa jej nezmestil do vane, rozhodla sa, že si vyrobí taký malý, ktorý bude mať dĺžku asi 20 cm. Spraví ho jednoducho tak, že si zoženie konštrukčné plány pôvodnej lode a spraví presne takú istú loď z presne takých istých materiálov, akurát každý rozmer niekoľkonásobne zmenší tak, aby dĺžka lode bola príslušných 20 cm. Bude Halucinkin výsledný výtvar plávať? Prečo?

Halucinka si vyrobila presnú maketu svojej obľúbenej lodičky, položila ju na vodu vo svojej vani a čo uvidela? To sa postupne dozvieme. ☺

Ako si väčšina z vás správne uvedomila, to, či bude Halucinkin model plávať, nejakým spôsobom súvisí s Archimedovým zákonom. Ten nám hovorí, že *teleso ponorené do kvapaliny je nadlahčované silou, ktorá je rovná tiaži kvapaliny s rovnakým objemom, ako je objem ponorenej časti telesa*. Ak teleso pokojne pláva, znamená to, že na neho pôsobiace sily sú v rovnováhe, čiže platí $F_g = F_{vz}$.¹ To môžeme upravovať nasledovne:

$$\begin{aligned}m_T \cdot g &= m_K \cdot g \\m_T &= m_K \\V_1 \cdot \rho_1 + \dots + V_N \cdot \rho_N &= V_K \cdot \rho_K\end{aligned}$$

Čo sme spravili? Titanik sme si rozložili na množstvo jednotlivých súčiastok očíslovaných od 1 po N , ktoré sú už vytvorené len z jedného materiálu. Hmotnosť Titaniku sme si zapísali ako súčet hmotností týchto súčiastok. Je ich veľa, ale to nám nijako neprekáža.

Doteraz sme sa rozprávali o skutočnom Titaniku. Čo dokážeme povedať o Halucinkinom modeli? Halucinka zachovala materiály,² takže všetky hustoty ρ v rovnici ostanú také isté. Tiež vieme, že Halucinkin model je dokonalá zmenšenina, tj. že v každom rozmere je k krát menší ako originál. To znamená, že objem každej jednej súčiastky V bude $k \cdot k \cdot k = k^3$ krát menší.

Na rad prichádza uvažovanie. Pokiaľ má zmenšenina plávať, musí tiež platiť rovnosť tiažovej a vztlakovej sily, teda musí platiť tá istá rovnica

$$V_1^{\text{model}} \cdot \rho_1^{\text{model}} + \dots + V_N^{\text{model}} \cdot \rho_N^{\text{model}} = V_K^{\text{model}} \cdot \rho_K^{\text{model}}$$

My však vieme, že všetky objemy V na ľavej strane rovnice (a teda celá ľavá strana!) sú k^3 krát menšie ako v prípade pôvodného Titaniku ($V^{\text{model}} = V/k^3$). Ak sa hustoty nezmenili

¹Básnik by povedal: *Tiaž telesa je rovná tiaži kvapaliny ním vytlačenej*.

²Otázka je, či zachovala aj slanú vodu. Tej sa budeme venovať na záver.

a má naďalej platiť rovnosť, musí byť aj objem vytlačenej kvapaliny V_K menší k^3 násobný. Nie je jasné prečo? Porovnajme tieto dve rovnice:

$$\begin{aligned} V_1 \cdot \rho_1 + \dots + V_N \cdot \rho_N &= V_K \cdot \rho_K \\ \frac{V_1}{k^3} \cdot \rho_1 + \dots + \frac{V_N}{k^3} \cdot \rho_N &= V_K^{\text{model}} \cdot \rho_K \\ &\Downarrow \\ V_K^{\text{model}} &= \frac{V_K}{k^3} \end{aligned}$$

To je veľmi dôležitý výsledok! Objem ponorenej časti zmenšil k^3 násobne, a celý Titanik tiež. To znamená, že pod vodou sa nachádza *taká istá* časť Titaniku, ako pred zmenšením. Halucinkin model teda bude tak isto dobre plávať. To je všetko.

Vaše riešenia: Väčšina z vás sa dopracovala k správne výsledku a body dole šli za nedostatočné vysvetlenia, ale aj tak ste veľmi šikovní. 😊 Častý problém bol, že ste v riešení využívali akúsi *priemernú hustotu* Titaniku a skutočnosť, že táto sa pri zmenšovaní nezmení. Toto riešenie je v podstate fajn, ale často ste *chybne* uvádzali nasledovnú vetu: *Aby Titanic plával, musí byť jeho priemerná hustota menšia ako hustota vody.* **Pozor!** Čo je to tá priemerná hustota? Ako sa počíta? Akým objemom treba deliť hmotnosť Titaniku?

Aby ste lepšie chápali problém, predstavte si Titanik ako dutú polguľovú misu. Keď ju položíme na vodu, bude *plávať*, hoci je z ocele. Prečo? Objem materiálu misky je veľmi malý, takže ani hmotnosť misky zrejme nie je veľmi veľká. Položená dnom nadol však vytláča veľký objem vody, dokonca niekoľkonásobne väčší ako objem jej materiálu, čo znamená veľmi veľkú vztlakovú silu. Napriek obrovskej hustote sa teda kovové teleso správneho tvaru dokáže udržať na vode.

Táto skutočnosť sa zmení, ak misku ponoríme. Zvnútra sa naplní vodou a objem vytlačenej vody je veľmi malý – rovný objemu materiálu misky. V tomto prípade platí známe kritérium, že ak je hustota materiálu misky väčšia ako hustota vody, miska pôjde ku dnu. Miska by šla ku dnu. Ku dnu by šiel aj ponorený Titanik – v jeho stenách sú síce vzduchové komory, ale ani tie nestačia na to, aby priemerná hustota Titaniku (v tomto prípade jeho celková hmotnosť delená celkovým objemom *vrátane* vzduchových komôr) bola menšia ako hustota vody.

Na záver ešte k nejakým poznámkam, čo ste písali do svojich riešení: To, že v Halucinkinej vani je sladká voda a v mori slaná, ovplyvní ponor *ale* nemôže ovplyvniť skutočnosť, či bude plávať alebo nie. Viete si predstaviť, že by sa nejaká loď potopila len preto, že poblíž ústiaca rieka by bola veľmi rozvodnená a „osladila“ by okolité more? Pochopiteľne, že nie. Lode bežne neplávajú pri plnom „výtlaku“³, ale musia mať nejakú rezervu. Tá sa využíva pri plavbe v sladších vodách s menšou hustotou.

³Tak sa nazýva veličina, ktorá určuje, koľko ton vody loď vytláča, a teda akú vztlakovú silu na ňu táto voda vytvára.

2.2 Koleso (opravovali — Hago a Judita)

Predstavte si takéto. Ste režisérom vysokorozpočtového filmu a máte starostí nad hlavu. Herci prichádzajú do práce nevyspatí a pod vplyvom alkoholu. Rekvizity sú nekvalitné a rozpadajú sa vám pod rukami. Nestíhate deadline a váš finančný partner sa vám vyhráza, že stiahne svoje financie z projektu. Hlavnej herečke sa na líci vyhodil pupák a teraz odmieta predstúpiť pred kamery. A navyše, občas sa stane, že keď snímate kamerou točiac sa koleso, vo výslednom filme sa koleso netočí vôbec, ba čo viac, niekedy sa dokonca točí dozadu. Vysvetlite, ako je to možné a zistite, pre akú najmenšiu rýchlosť otáčania kolesa (koľko otáčok za sekundu) bude koleso na filme stáť. Predpokladajte koleso také ako na obrázku. Film sa točí kamerou, ktorá berie 24 obrázkov za sekundu (teda, ako keby 24 krát za sekundu odfoťí celú scénu).

Prečo koleso niekedy vyzerá akoby stálo? Keby koleso vyzeralo na každej fotke rovnako, tak by sa na filme zdalo, že stojí. Naša kamera urobí 24 fotiek za sekundu, teda odfoťí koleso každú $1/24$ sekundy. Ak koleso vyzerá každú $1/24$ sekundy rovnako, tak na filme koleso stojí. To je celý dôvod.

Ľubovoľné koleso⁴ by na ďalšej fotke vyzeralo rovnako, ak by za $1/24$ sekundy urobilo jednu celú obrátku. *Naše koleso je špeciálne*, skladá sa zo šiestich rovnakých kúskov točiacich sa okolo spoločného stredu. Zrejme ho preto stačí otočiť o $1/6$ obrátky. Predstavte si to. Rovnako ho môžeme otočiť o $2/6$ obrátky, $3/6$ obrátky, o celú obrátku, o jeden a pol obrátky – vo všeobecnosti o celočíselné násobky $1/6$ obrátky – A bude vyzeráť tak ako predtým!

Akou najmenšou rýchlosťou sa musí koleso otáčať, aby vyzeralo, že stojí? Rýchlosť otáčania bude najmenšia, keď sa za $1/24$ sekundy koleso otočí o čo najmenší kúsok. Týmto kúskom je spomínaná $1/6$. Teda najmenšia rýchlosť bude pri otočení o $1/6$ obrátky za $1/24$ sekundy. Koleso urobí $1/6$ obrátky 24krát za sekundu. Výsledná rýchlosť bude $1/6 \cdot 24 = 4$ obrátky za sekundu.

Ako vzniká efekt točenia dozadu? My nevidíme, ktorým smerom sa koleso točí, vidíme len jeho pozície každú $1/24$ sekundy. Otočením o uhol x dopredu sa koleso dostane do rovnakej pozície ako otočením o uhol $360^\circ - x$ dozadu. Ak je uhol $360^\circ - x$ menší ako uhol x , bude sa nám pravdepodobne zdať, že koleso sa z polohy predchádzajúcej dostalo do polohy nasledujúcej kratšou cestou, teda otočením dozadu. Film nevnímame ako jednotlivé fotky, zdá sa nám súvislý a chýbajúce kúsky si domyslíme.⁵

Naše na šestiny rozdelené koleso však vyzerá rovnako pri otočení už o $1/6$ otáčky. Predstavte si otočenie dopredu o 59° , čo je takmer $1/6$ obrátky. Koleso bude vyzeráť rovnako, ako keby sa otočilo o 1° dozadu. Na filme by sa zdalo, že koleso sa pomaličky točí dozadu. Koleso budeme vnímať ako točiac sa dopredu, ak sa otočí dopredu za $1/24$ sekundy o $n/6$ obrátky + uhol medzi 0° a 30° (30° je polovica šestiny obrátky) a ako točiac sa dozadu,

⁴Napríklad koleso s nápisom UFO naboku.

⁵Dobre to funguje, pokiaľ chýbajúce kúsky nie sú od seba veľmi ďaleko. Ponechávam na vašu fantáziu zistiť, čo sa deje pre veľké posunutia! Najprv si však prečítajte aj zvyšok vzoráku.

ak sa dopredu otočí o $n/6$ obrátky + uhol medzi 30° a 60° (60° je šestina obrátky), kde n je celé kladné číslo.

Poznámka záverom: V skutočnosti je situácia ešte skomplikovaná o jednu vec. Kamera nezachytí obraz *okamžite*, ale zaznamenáva ho istý čas, tzv. *expozičný čas*. Je to rovnaké ako u foťákov, kde robíte rozmazané ruky kvôli vašej triaške rúk. Ale späť ku kamere: Keďže zachytávanie obrazu trvá istý nenulový čas, stihne sa za tento čas koleso kúsok pootočiť. To sa prejaví najmä pri veľkých rýchlostiach postupným rozmazávaním obrazu. Pre malé otáčky je však naše riešenie správne.

2.3 Vajco (opravovali — Aďa a Halucinka)

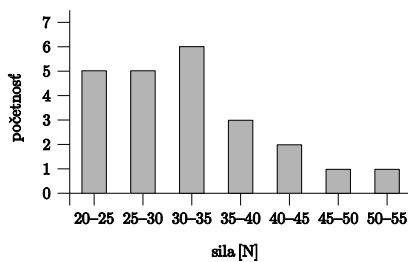
Vo FKS máme vajcia. Uvarené v rýchlovarnej kanvici sa stávajú každodennou proteínovou zásobárňou matfyzom unaveného FKSáka. A pri takom olovrate človeka začnú napadať veci. . . Napríklad: Vezmite vajce a nejakou upevnite na stôl tak, aby stálo na svojej širšej špičke. Priamo zhora naň zatlačte doskou. Odmerajte:

- Aká sila je potrebná na rozbitie vajca?
- Ako veľmi túto hodnotu ovplyvní, ak vajce vyfúknete?

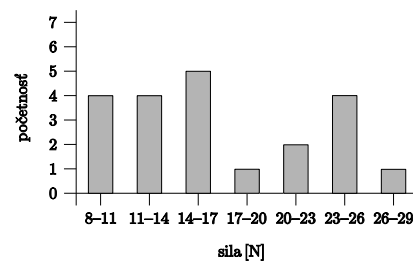
Prípadný rozdiel medzi hodnotami v a) a b) stručne vysvetlite.

Zdravím všetkých experimentátorov. Dúfam, že vajcová úloha spojila príjemné (radosť z fyzikálneho experimentovania) s užitočným (prípravou praženice, týmto zároveň ďakujem za všetky fotografie praženíc, ktoré ste spolu s fotodokumentáciou riešení poslali).

Najprv pár slov o technickej realizácii experimentu. Mierne problémy mohlo spôsobiť stabilizovanie vajčička na širšej špičke, s čím ste si poradili plastelínou, múkou, či mokrým toaletným papierom. Ako závažie na kuchynskej doske ste najčastejšie použili hrniec či inú nádobu, do ktorej ste prilievali vodu, ale využila sa i misa s ovocím či obsah chladničky (250g maslo nemenovanej značky, 42g pekárenske droždie a pod.). Vami dosiahnuté výsledky som zhrnul do nasledovných grafov, v ktorých na vodorovnej osi je sila potrebná na rozbitie vajca a na zvislej osi početnosť výskytov v riešeníach:



Obr. 1: Plné vajce



Obr. 2: Vyfúknuté vajce

Z grafov (výsledkov Vašich riešení) vyplýva veľké rozpätie nameranej sily potrebnej na rozbitie vajec, čo možno vysvetliť ich rozdielnou kvalitou „od prípadu k prípadu“ (určite

platí, že každé vajce je svojim spôsobom jedinečný materiál). Čo platí pre riešenia ako celok, platí i pre samotného riešiteľa. Ako ste mnohí zistili, výsledky jednotlivých „rozbíjaní“ sa od seba „dost“ (rádovo v jednotkách newtonov) líšili, preto bolo potrebné urobiť viac meraní a z nich vypočítať aritmetický priemer. Tí z vás, ktorí to neurobili a rozbili len jedno vajce, si vo výsledkovke nájdú o bod menej.

Ako sa intuitívne dalo predpokladať a Vaše riešenia to jednoznačne potvrdzujú, plné vajce vydrží viac. Prečo? Pri stláčaní prázdneho vajca mením jeho objem, napríklad preto, že „vtlačam“ špičku dovnútra. Vaječné vnútro je však ťažko stlačiteľná kvapalina a tak každé stláčanie nejakej časti škrupiny (či už sa jedná o vtlačanie špičky alebo nie) musí nutne sprevádzať rozťahovanie inej časti škrupiny. V celom vajci tak narastá tlak, ktorý bráni ďalšiemu stláčaniu a vajíčko takto celkovo vydrží viac. Je to ako keby menej namáhané časti pomocou tlaku na kvapalnú obsah vajca pomáhali tým viac namáhaným častiam uniesť viac.

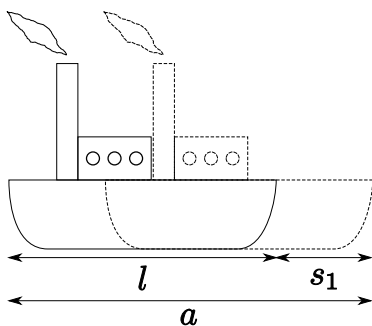
2.4 Pevný krok (opravovali — Andrej a Tinka)

Samo sa minule prechádzal po nábřeží a zrazu vidí po Dunaji plávať Titanik. „To by sa Halucinka potešila, keby tu bola,“ blysko Samovi hlavou. Tak si povedal, že aspoň zistí, aká je tá loď dlhá. Nič nie je jednoduchšie. Odkedy sa Samovi stala nepríjemná príhoda s Ukrajinskými policajtmi, má jeho krok dĺžku presne 90 cm a tak Samuel nemá problém odkrokovat' hocičo. Postavil sa zarovno zadnej časti lode a krokoval smerom dopredu. Keď prešiel vzdialenosť $a = 140$ m, dobehol akurát prednú časť lode. Samuel však tuší, že jeho meranie nebude ktovieako správne – pokiaľ krokoval, loď sa predsa hýbala! Preto sa hneď otočil a krokoval smerom naspäť. Tentoraz krokoval proti pohybu lode a preto kým prišiel zase zarovno jej konca, nakrokoval iba $b = 60$ m. Spokojný s priemernou hodnotou 100 metrov zanechal meranie a odišiel.

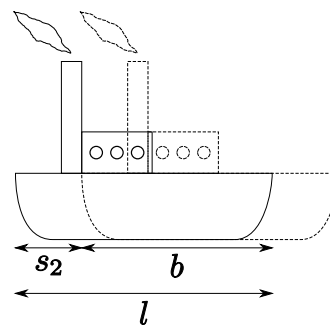
- Očakávali by ste že loď bude mať menšiu, väčšiu alebo presne takú dĺžku ako Samo zistil?
- Aká dlhá je loď?

Predpokladajte, že celý čas sa Samo aj loď pohybovali rovnomernými pohybmi. Úlohu skúšajte riešiť čo naj všeobecnejšie – skúste sa dopracovať k vzorcu v ktorom budú len hodnoty a, b . Avšak fajn bude aj to, ak úlohu zrátate pre konkrétne zadané hodnoty.

Čaute národ. Už staré mamy vraveli, že čo sa dá nakresliť, je kresliť si pri rátaní dobré, preto tu bude dobré mať obrázok:



Obr. 3: Meranie tam



Obr. 4: Meranie späť

Riešenie a): Keď Samo spriemeruje dve čísla, dostane číslo presne medzi nimi. Priemer sa od oboch čísel odlišuje o rovnakú hodnotu. Číslo a je od l dlhšie o dráhu lode s_1 , číslo b je od l kratšie o s_2 , ako vidno z obrázkov. Keďže chceme dostať priemer l , by mali byť rovnaké. *To však nie je pravda!* Ukážeme si, prečo.

Samo i loď sa pohybujú *rovnomerne*, tj. ich rýchlosť sa nemení. Prejdená dráha je priamo úmerná času podľa vzťahu $s = vt$. Keď ide Samo v smere lode, prejde dlhšiu dráhu, než keď ide oproti nej (tj. $a > b$), a preto aj čas pri dobiehaní lode je dlhší. Dlhší čas... takže aj loď sa pri dobiehaní stihla posunúť o väčšiu dráhu, než keď jej išiel Samo naproti. Písmenkami zapísané $s_1 > s_2$, takže Titanic určite nemá dĺžku 100 metrov.

Pozrime sa na to trochu matematickejšie:

$$\frac{a+b}{2} = \frac{(l+s_1) + (l-s_2)}{2} = \frac{2l+s_1-s_2}{2} = l + \frac{s_1-s_2}{2}$$

Vieme, že $s_1 > s_2$, teda výraz $(s_1 - s_2)/2$ je kladné číslo.

Z upravených rovníc vidieť, že $(a+b)/2$ je väčšie ako skutočná dĺžka lode. Inak povedané, skutočná dĺžka lode je menšia ako „priemerných“ 100 metrov.

Riešenie b): Z obrázkov vidíme, že v prvom prípade prešiel Samo svojou rýchlosťou v_S dráhu a , loď rýchlosťou v_L prešla dráhu $a - l$. Keďže časy sú rovnaké, platí

$$\frac{a}{v_S} = \frac{a-l}{v_L}$$

Pre druhý prípad dostaneme obdobnou úvahou z obrázku:

$$\frac{b}{v_S} = \frac{l-b}{v_L}$$

Čo teraz? Máme systém dvoch rovníc o 3 neznámych: v_S , v_L a l . To neznie veľmi dobre. My navyše ani nevieme určiť, akými rýchlosťami sa Samo a loď pohybovali.⁶ Nenechajme sa však odradiť a pustíme sa do úpravy rovníc.

Z prvej vyjadríme v_S :

$$\begin{aligned} \frac{a}{v_S} &= \frac{a-l}{v_L} \\ \Downarrow \\ v_S &= \frac{av_L}{a-l} \end{aligned}$$

Dosadíme do druhej

$$\begin{aligned} \frac{b}{av_L/(a-l)} &= \frac{b(a-l)}{av_L} = \frac{l-b}{v_L} \\ \Downarrow \\ b(a-l) &= a(l-b) \end{aligned}$$

⁶Predstavte si, že celú situáciu nahráte na film a pustíte spomalene. Všetky dĺžky by zostali zachované, ale rýchlosti by vyšli niekoľkokrát menšie. Takže úloha nemôže mať jednoznačné riešenie, čo sa veľkosti rýchlostí týka. Iné to však je v prípade pomeru rýchlostí. Ten zostane rovnaký aj po spomalení. Premyslite si to!

To je jedna rovnica s jedinou neznámou.

Alternatívne riešenie je vydeliť prvú rovnicu druhou. Dostali by sme

$$a/b = (a - l)/(l - b)$$

čo po odstránení zlomkov dá rovnaký tvar ako sme získali dosadením.

Pokračujme v úpravách

$$ab - lb = al - ab$$

Výrazy s l premiestnime na jednu stranu rovnice:

$$2ab = al + bl$$

Vyjmeme l pred zátvorku:

$$2ab = l(a + b)$$

↓

$$l = \frac{2ab}{a + b}$$

Toť výsledok. Ak dosadíme zadané hodnoty, dostaneme $l = 84$ m. To je skutočne menej než rýchlym odhadom získaných 100 m.

K riešeniam: Čo sa týka vašich riešení, častým problémom bolo nepochopenie časti (a) úlohy. Nemalo ísť o tipovaciú súťaž spoločnosti Vlček&brat,⁷ ale vaše *očakávania* tu bolo treba riadne odôvodniť. Bohužiaľ, v mnohých prípadoch ste bez akéhokoľvek premýšľania iba tipovali. Keby ste sa boli viac zamysleli, o to skôr by ste vyriešili aj časť (b) úlohy.

Matematická poznámka: Výsledok, ktorý sme dostali, sa vyskytuje pomerne často,⁸ preto sa OZVMAFÚ⁹ rozhodol udeliť mú vlastný názov *harmonický priemer*. Vo všeobecnosti preň platí

Harmonický priemer čísel = počet čísel/súčet prevrátených hodnôt

čo sa pre dve čísla a a b dá upraviť na nami získaný výsledok. Ako už naznačilo riešenie tejto úlohy, harmonický priemer dvoch kladných čísel je vždy menší než ich aritmetický priemer.

⁷ Tipujte na jednu z troch možností: $l < 100$ m, $l = 100$ m alebo $l > 100$ m? Za správny tip dostanete 2 body, za tip na susednú možnosť 1 bod. Toto nie!

⁸Ľaľa príklad: Samo prešiel prvú polovicu dráhy rýchlosťou v_1 , druhú rýchlosťou v_2 . Akou priemernou rýchlosťou sa pohyboval? Riešenie bude znova $2v_1v_2/(v_1 + v_2)$

⁹Odborový zväz výsledkov matematických a fyzikálnych úloh.