Fyzikálny korešpondenčný seminár
3. ročník, 2009/2010
UFO, KTFDF FMFI UK, Mlynská dolina, 84248 Bratislava
e-mail: otazky@fks.sk web: http://ufo.fks.sk

Vzorové riešenia 3. kola zimnej časti 2009/2010

3.1 Priehrada (opravoval Marcel)

O Oravskej priehrade sa nám podarilo zitiť nasledujúce fakty: Priemerný prietok Oravy v mieste priehrady je zhruba $Q = 19{,}8\,\mathrm{m^3/s}$, veľkosť povodia z ktorého sa rieka zbiera je $1\,180\,\mathrm{km^2}$, a priemerný ročný úhrn zrážok v tejto oblasti je $1\,100\,\mathrm{mm}$. Plocha Oravskej priehrady je $35\,\mathrm{km^2}$. Odhadnite:

a) (5 bodov) O koľko klesne vodná hladina plne napustenej priehrady za týždeň, ak Orava bude pritekať s prietokom Q a budeme ju vypúšťať prietokom $2Q$?

b) (4 body) Koľko percent zrážkovej vody sa dostane do priehrady?

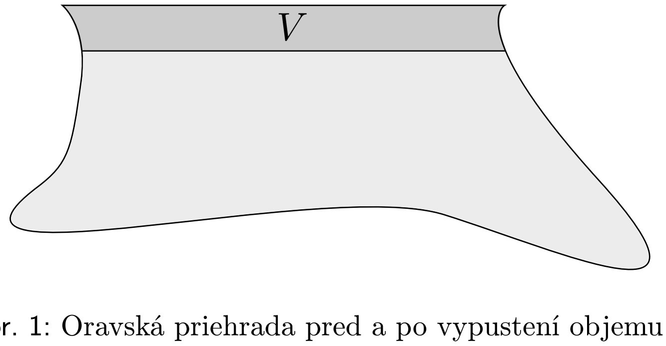
a) napúšťanie Q a vypúšťanie $2Q$ vlastne znamená, že vypúšťame Q. Vypúšťať Q po celý týždeň znamená vypustiť objem $V = Qt$. Zostáva zistiť, aký pokles hladiny spôsobí vypustenie objemu V vody. Ak by hladina nepoklesla veľmi výrazne, bol by dobrý predpoklad, že plocha vodnej hladiny sa počas poklesu takmer nemení (obr. 1). Vtedy by však takmer presne platilo, že $V = S\Delta h$, kde Δh je výška, o ktorú poklesla hladina priehrady a S je plocha jej vodnej hladiny. Po úprave dostávame:

$$Qt = V = S\Delta h \Rightarrow \Delta h = Qt/S\,.$$

Ak dosadíme číselné hodnoty, máme

$$\Delta h = Qt/S = \frac{19{,}8\,\mathrm{m^3/s} \cdot 604\,800\,\mathrm{s/týždeň}}{35\,000\,000\,\mathrm{m^2}} \approx 0,35\,\mathrm{m/týždeň}$$

Vidíme, že pokles hladiny je skutočne malý ($35\,\mathrm{cm}$ je pre bežnú priehradu nič), predpoklad, že sa plocha hladiny po poklese nezmení bol teda dobrý a mohli sme si ho dovoliť.



Obr. 1: Oravská priehrada pred a po vypustení objemu V

Seminár podporujú:

b) zrážky tečúce do priehrady Z čoho sa berie voda tečúca do priehrady? No asi len zo zrážok. Lebo aj všetky pramene a podzemná voda sa musela dostať na súš niekedy z nejakých zrážok. Veľká časť zrážok sa však stratila, lebo ju vypili rastliny, zvieratká, alebo sa vyparila. Takže všetka voda tečúca do priehrady pochádza zo zrážok, avšak nie všetky zrážky sa dostanú do priehrady. Ak označíme P plochu povodia rieky a z priemerné ročné zrážky, zistíme, že priemerne v oblasti, z ktorej sa rieka zbiera, naprší za rok $Pz \cdot 1\,\mathrm{rok}$ zrážok. Za ten istý rok však cez priehradu pretečie $Q \cdot 1\,\mathrm{rok}$ vody. Pomer pretečenej vody za rok a celkových zrážok za rok bude:

$$\eta = \frac{Q \cdot 1\,\mathrm{rok}}{Pz \cdot 1\,\mathrm{rok}} = \frac{Q}{Pz}$$

Ak dosadíme číselné hodnoty, dostávame:

$$\eta = \frac{19{,}8\,\mathrm{m^3/s}}{1\,180\,000\,000\,\mathrm{m^2} \cdot 1{,}1\,\mathrm{m/rok}} \approx \frac{624\,000\,000\,\mathrm{m^3/rok}}{1\,300\,000\,000\,\mathrm{m^3/rok}} \approx 48\,\%$$

K riešeniam: Pozor na jednotky, ak dosádzame číselné hodnoty, treba ich dosádzať aj s jednotkami, inak vám môžu vyjsť blbosti. Napríklad spočítate, že človek pohybujúci sa rýchlosťou $5\,\mathrm{km/h}$ za jednu sekundu prejde $5 \cdot 1\,\mathrm{km}$:-). Správne treba písať, že prejde vzdialenosť $5\,\mathrm{km/h} \cdot 1\,\mathrm{s} = 5/3\,600\,\mathrm{km/s} \cdot 1\,\mathrm{s} = 5/3\,600\,\mathrm{km}$. Toto mnohým z Vás v príklade robilo problémy, preto si na to prosím dajte v budúcnosti pozor. Ďakujem za pozornosť a dovidenia nabudúce!

3.2 Izidor II (opravovali Paľo a Halucinka)

Izidor, Hyacinta a Gertrúda bývajú v jednom činžiaku. Do školy chodia každé ráno o 7^{00}, pričom o 8^{00} začína samotné vyučovanie. Všetci traja chodia tou istou dráhou avšak nie spolu – každý si drží svoju konštantnú rýchlosť pohybu.

Izidor príde do školy vždy presne na začiatok vyučovania. Hyacinta sa rada ešte porozpráva s kamarátkou o živote, a preto sa ponáhľa – príde do školy 20 minút pred začatím vyučovania. Gertrúda vsadila na zlatú strednú cestu a chodí priemernou rýchlosťou Izidora a Hyacinty. Koľko minút pred vyučovaním príde Gertrúda do školy?

Pozrime sa najprv na to, čo vlastne o Izidorovi a jeho kamarátoch vieme. Všetci traja bývajú v jednom a tom istom činžiaku, čiže každý z nich cestou do školy prejde tú istú vzdialenosť. Aby naše riešenie určite platilo pre *každú* vzdialenosť činažiaka a školy, označme ju len písmenkom, napríklad s.[1] Zo zadania ďalej vieme vyčítať, že Izodorovi trvá cesta do školy presne hodinu, čiže $t_\mathrm{I} = 60\,\mathrm{min}$. Hyacinte bude cesta trvať o 20 minút menej, než je jedna celá hodina, čiže $t_\mathrm{H} = 40\,\mathrm{min}$. Poslednú vec, ktorú vieme zistiť je, že Gertrúdina rýchlosť je priemerom[2] rýchlostí Izodora a Hyacinty, teda $v_\mathrm{G} = \frac{1}{2}(v_\mathrm{I} + v_\mathrm{H})$.

Keď sme už zo zadania vyžmýkali všetko, čo sa dalo, poďme sa pustiť do riešenia. Zo známeho vzorca $v = s/t$ si vyjadrime rýchlosť Izidora a Hyacinty – $v_\mathrm{I} = s/t_\mathrm{I}$ a $v_\mathrm{H} = s/t_\mathrm{H}$.[3] Gertrúdina rýchlosť bude teda:

$$v_\mathrm{G} = \tfrac{1}{2}(v_\mathrm{I} + v_\mathrm{H}) = \tfrac{1}{2}(s/t_\mathrm{I} + s/t_\mathrm{H}) = \tfrac{1}{2}s(1/t_\mathrm{I} + 1/t_\mathrm{H})$$

[1] mohli by sme si ju označiť aj *Fero*, ale komu by sa to chcelo písať do rovníc? :-) (povedal Palo a ďalej kráčal do školy po Ferovi, pozn. Haluuc:-))

[2] druhovým menom *aritmetickým*

[3] Náročky si nedosadzujem čísla za t_I a t_H; pokiaľ sa to dá, skúšajte to robiť až v poslednom výpočte, pretože potom to zvádza k zaokrúhľovaniu a neprehľadnosti.

Podľa ďalšieho známeho vzorca, $t = s/v$ už vieme dorátať príklad – vypočítame čas, za ktorý príde Gertrúda do školy:

$$
\begin{aligned}
t_{\mathrm{G}} &= s/v_{\mathrm{G}} \\
t_{\mathrm{G}} &= \frac{s}{\frac{1}{2}s(1/t_{\mathrm{I}} + 1/t_{\mathrm{H}})} \\
t_{\mathrm{G}} &= \frac{2}{1/t_{\mathrm{I}} + 1/t_{\mathrm{H}}} \qquad (1)
\end{aligned}
$$

Z rovnice (1) si už jednoducho vypočítame čas, za ktorý Gertrúda príde do školy:

$$t_{\mathrm{G}} = \frac{2}{1/(60\,\mathrm{min}) + 1/(40\,\mathrm{min})} = 48\,\mathrm{min}$$

Prečo je rovnica (1) očíslovaná? Správna otázka :-). Ona totiž hovorí o jednej veľmi peknej vlastnosti – o tom, že čas, za ktorý Gertrúda prejde svoju cestu do školy je *harmonickým* priemerov časov, za ktoré prejdú cestu do školy Izidor a Hyacinta.[4]

Ešte k Vašim riešeniam – boli ste veľmi šikovní, Pištíci :-). Veľa z vašich riešení si právoplatne zaslúžilo 9 bodov. Na čo si najviac skúste dávať pozor je to, že keď nejaká hodnota v zadaní zadaná *nie je*, tak chceme, aby ste príklad počítali *všeobecne*, nie aby ste si túto hodnotu vymysleli. Veľa z vás si totiž vymyslelo konkrétnu dĺžku dráhy alebo rýchlosť Hyacinty, či Izidora a obmedzilo výpočet na ten konkrétny prípad. Toť vsjo. Doskakavenia, priatelia :-).

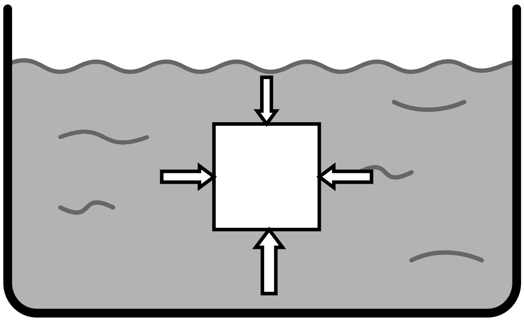
3.3 Klamú nás? (opravovala HAgO)

Keď je teleso ponorené do vody, pôsobí naň vztlaková sila – hovorí Archimedov zákon. Ak však vezmeme kelímok napr. od margarínu (alebo ešte lepšie nejakú prísavku) a pricapíme ho o dno hrnca (obr.) môže tam chvíľu ostať držať a to napriek tomu, že vztlaková sila naň pôsobiaca by mala byť oveľa väčšia ako tiaž kelímka. Prečo je to tak? A čo na to ujo Archimedes a jeho zákon?

V škole nás učia (učili a budú učiť) o zákone pána Archimeda. Ten nám hovorí: „Vztlaková sila pôsobiaca na teleso sa rovná tiaži kvapaliny telesom vytlačenej.“ To by pre náš kelímok, očividne ľahší ako rovnaký objem vody[5], malo znamenať stúpanie. Prečo teda zostane chvíľu na dne? Na zodpovedanie tejto otázky sa pravdepodobne budeme musieť pozrieť do hĺbky a zistiť, odkiaľ sa vlastne záhadná *vztlaková sila* berie.

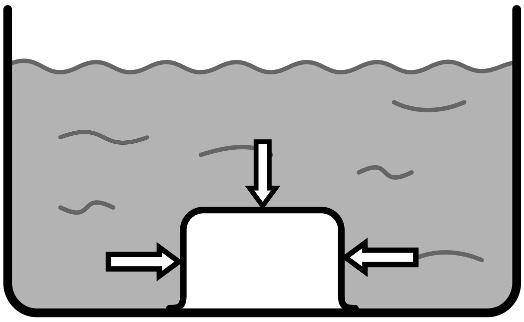
Odkiaľ máme *vztlakovú silu*? V kvapalinách žije škriatok zvaný *hydrostatický tlak*. Má jednu zvláštnosť – je tým väčší, čím sme hlbšie. Keď ponoríme do vody teleso (pre jednoduchosť kocku), tak bude *hydrostatický tlak* pôsobiť na kocku zo všetkých strán (obr. 2). Sily pôsobiace na bočné steny kocky sú rovnaké[6], čiže ich výslednica je nulová. Dolná stena je však hlbšie ako horná, a preto je sila pôsobiaca na dolnú stenu väčšia. Výsledná sila pôsobiaca na kocku bude teda smerovať nahor. A to je ona. *Vztlaková sila.* A je zapríčinená *hydrostatickým tlakom.*

[4] Viac o harmonickom priemere na `http://sk.wikipedia.org/wiki/Harmonický_priemer`
[5] vzduch je ľahší ako voda
[6] bočné steny sú rovnako *rozprestreté* v hĺbkach



Obr. 2: Sily pôsobiace na teleso v kvapaline

A prečo zrovna náš kelímok nestúpa? Zatiaľ to pre kelímok vyzerá zle – podľa všetkého by mal vyplávať. Bystré hlavy si však možno všimli, že kelímok nemá pod sebou vodu ale rovno dno. Takže *hydrostatický tlak* nemá ako pôsobiť zdola. Keďže nepôsobí žiadna sila zdola, výslednica síl nemá smer nahor. Naopak – smeruje dole. Čiže kelímok nie je nadľahčovaný, ale priam až pritláčaný ku dnu. Celá situácia je znázornená na obrázku:



Obr. 3: Sily pôsobiace na kelímok na dne

Ale prečo sa tam neudrží večne? Keby bol spoj kelímka a dna dokonalý, tak by na dne žil šťastne až naveky. Lenže práve kvôli nedokonalostiam sa pod kelímok dostane voda a *hydrostatický tlak* zrazu začne pôsobiť aj zdola. Kelímok povie: „Bli, bla, blu“ a vypláva…[7] Archimedov zákon je správny, ale hovorí o telese ponorenom, nie pricapenom na dne.

Pár pekných slov k Vašim riešeniam – cez tento príklad ste sa prehrýzli viac-menej úspešne. Kto sa neprehrýzol, môže zahryznúť aspoň do mrkvy. Najčastejšou chybou, ktorú ste páchali bolo, že ste spomínali aj *vztlakovú silu* aj *hydrostatický tlak*. A ako sme si povedali v tomto texte, oni tam nie sú naraz, lebo *vztlaková sila* je len dôsledkom *hydrostatického tlaku*. No našli sa aj riešenia lepšie ako tento vzorák, takže len tak ďalej riešte a nenechajte sa ničím odradiť, lebo raz sa z Vás možno stanú hviezdy a ja chcem autogramy. Dovidenia, majte sa krásne…:)

[7] som zvedavý, koľko ľudí sa sem pozrie :)

3.4 Podivný Filipov zvyk (opravovala Judita)

Filip si každé ráno, každý večer a občas aj inokedy robieva kakao. Do pohára s objemom $0{,}3\,\mathrm{l}$ naleje mlieko a dá si tam tri lyžičky granka. Dlho dlho mieša. Potom sa napije, ale zo zvyku nechá desatinu kakaa nedopitú. Pohár opäť doplní a opäť pridá tri lyžičky granka. Keďže Filip má naozaj rád kakao, takýto postup zopakuje veľmi veľa krát.

a) Aká koncentrácia kakaa (lyžičiek na liter mlieka) bude v pohári po veľa pitiach?

b) (nebodové) Existuje rozumné vysvetlenie, prečo to robí? (áno, existuje :-))

Predpokladajte, že rozmiešaním kakaa v mlieku objem mlieka nenarastá.

Ahojte. Chutí vám Granko? A chutila aj úloha? Ak nie, tak si pochutnajte aspoň na vzoráku.

Ideálne je najprv vyskúšať úlohu v praxi. Vypijeme pohár, necháme čosi na dne a pridáme mlieko. Ihneď si všimneme, že výsledný nápoj je už trochu zagrankovaný. Keď teraz pridáme tri lyžičky Granka, tak nový nápoj bude silnejší ako ten pôvodný. Opäť časť vypijeme. Na dne nám ostane hustejší nápoj a teda aj po doliatí mliekom bude viac zagrankovaný. Koncentrácia sa pridaním troch lyžičiek ešte zvýši. Vidíme teda, že nápoj je čoraz hustejší. Koncentrácia stále rastie. Ale mohlo by nám byť zjavné aj to, že niekedy sa to musí zastaviť. Veď po doliatí mlieka nemôže byť nápoj tvorený len Grankom. Za takéto pozorovanie už mohli byť body. Otázkou je však stále to, kde sa to ustáli po veľa pitiach.

Môžeme sa hrať na matematikov a ísť počítať nejaké škaredé geometrické rady. Ale my sa budeme hrať na fyzikov. Pointa je v tom, že sa pýtame na stav po veeeeeeľa pitiach. A my sme si povedali, že sa to musí nejako ustáliť. To, aká (prechodná) koncentrácia bude po málo meraniach, nás trápiť nemusí.

V ustálenom stave musí zjavne platiť, že vypitím časti mlieka vypijeme spolu s ním aj tri lyžičky Granka. Keby sme ich totiž vypili menej, tak by sa po pridaní ďalších 3 lyžičiek koncentrácia ešte zvyšovala. Keby sme ich vypili viac, tak by sa znižovala. Tak či onak, nebol by to ustálený stav.

Čiže vieme, že vo vypitých $\frac{9}{10}$ hrnčeka, čo je 270 ml, musia byť 3 lyžičky granka. Koľko lyžičiek granka je v 300 ml?

$$\tfrac{9}{10}\ \text{hrnčeka} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 3\ \text{lyžičky}$$

$$\tfrac{10}{10}\ \text{hrnčeka (plný hrnček)} \ldots\ldots\ldots x\ \text{lyžičiek}$$

$$x = \tfrac{10}{3}\ \text{(lyžičky)}$$

V plnom hrnčeku budú tri celé a jedna tretina lyžičky.

Mnohí z vás si všimli, že pri prvom pití sú v hrnčeku 3 lyžičky granka, pri druhom pití 3,3 lyžičky, pri treťom 3,33 lyžičky, pri štvrtom 3,333 lyžičky, atď. Avšak to, že to takto vyzerá pri niekoľkých pitiach na začiatku, ešte nemusí nutne znamenať, že to bude fungovať donekonečna, ako mnohí z vás napísali. To, že v tomto prípade to fungovať bude, prispelo k tomu, že sme takéto riešenia akceptovali. A ďakujem za zaujímavé komenty v časti b).

Výsledková listina po 3. kole zimnej časti 2009/2010

	Meno	Škola	Roč.	1	2	3	4	♡	Σ_3	Σ
1	Eduard Batmendijn	CGSM	8.	9	9	9	9	0,00	36,00	108,00
2	Martin Kotian	ZŠ Moravany	7.	8	9	8	9	1,02	35,02	101,91
3	Jaroslava Kokavcová	ZŠ MRŠ	7.	9	9	5	9	1,92	33,92	101,76
4	Lukáš Ivan	G BA J.Hronca	8.	8	8	9	9	0,54	34,54	101,33
5	Barbora Velichová	ZSJGT	8.	9	9	9	9	0,00	36,00	100,94
6	Matúš Jenča	ZŠ Karloveská	8.	6	9	8	9	1,02	33,02	100,10
7	Peter Dekrét	G Sk	8.	6	9	5	7	1,94	28,94	98,03
8	Miroslav Gašparek	CZŠ sv. Marg.	8.	6	9	9	9	0,79	33,79	97,38
9	Adam Škrlec	ZŠ Ostredková	7.	9	6	7	9	2,33	33,33	95,78
10	Jozef Bucko	ZŠ H. Otrokovce	8.	9	6	7	9	1,24	32,24	95,47
11	Matej Ralbovský	GŠB	8.	9	2	7	7	2,20	27,20	90,08
12	Radka Kováčová	G Piešťany	8.	6	9	6	9	1,44	31,44	89,18
13	Irena Bačinská	G Lipany	8.	9	6	3	9	1,94	28,94	89,17
14	Pavlína Hodulová	G Piešťany	8.	9	9	4	9	1,24	32,24	88,94
15	Zuzana Magyarová	G Lučenec	8.	6	2	8	9	2,20	27,20	88,30
16	Barbora Husáriková	G BA Bajkalská	8.	9	9	6	3	1,94	28,94	86,99
17	František Dráček	ZŠ D.Mariková	8.	5	8	5	9	1,94	28,94	84,96
18	Martin Perešíni	ZŠ Radvanská	9.	8	9	7	3	0,00	27,00	81,00
19	Ľudovít Popelka	ZŠ ĽŠ Šaľa	9.	6	7	8	9	0,00	30,00	80,00
20	Cindy Baloghová	ZŠ Vráble	8.	7	2	7	8	2,30	26,30	78,00
21	Dávid Kitka	ZŠ MK	4.	1	2	3	1	3,05	10,05	65,02
22	Michaela Balážová	ZŠ B.n.B.	9.	5	6	–	–	0,00	11,00	64,00
23	Antónia Vrbičanová	ZŠsMŠ L. Hrádok	8.	4	2	4	2	0,30	12,30	57,33
24	Peter Kovács	G KE Alejová	8.	4	2	4	–	2,08	12,08	57,20
25	Tomáš Barbuščák	ZŠ Kožuch	6.	–	–	–	–	0,00	0,00	56,85
26	Andrej Kluka	G Piešťany	7.	–	–	–	–	0,00	0,00	56,64
27	Gábor Murónyi	ZŠ MK	4.	–	–	–	–	0,00	0,00	51,45
28	Lukáš Kurka	ZSO	8.	–	–	–	–	0,00	0,00	49,66
29	Michal Bačinský	ZŠ Dolná Tižina	8.	–	–	–	–	0,00	0,00	48,93
30	Michal Šipický	ZŠ ĽŠ Šaľa	8.	2	2	4	1	1,94	10,94	48,06
31	Dušan Macháč	ZŠ Moj.	9.	–	–	–	–	0,00	0,00	47,00
32	Nikolett Szabóová	ZŠ MK	7.	–	–	–	–	0,00	0,00	45,72
33	Bálint Szabó	ZŠ MK	8.	5	*	*	–	1,24	6,24	45,41
34	Christian Farkas	ZŠ ĽŠ Šaľa	8.	2	2	4	4	2,30	14,30	40,45
35	Peter Klausman	ZŠ ĽŠ Šaľa	8.	2	2	6	4	2,46	16,46	40,37
36	Samuel Kern	ZŠ Bučany	8.	–	–	–	–	0,00	0,00	36,16
37	Jana Kubusová	ZŠ Vikartovce	9.	2	6	1	3	0,00	12,00	36,00
38	Viktória Hradecsná	ZŠ Jilemnického	8.	1	2	3	1	1,62	8,62	35,65
39	Stanislav Bednár	G BA J.Hronca	8.	–	–	–	–	0,00	0,00	33,79
40	Filip Fidrik	ZŠ Rabča	9.	2	7	3	1	0,00	13,00	33,00
41	Barbora Lakotová	G BA Grösslingova	8.	–	–	–	–	0,00	0,00	28,08
42	Katarína Ősziová	CZŠ Ž. Bosniakovej	9.	–	–	–	–	0,00	0,00	26,00
43	Erik Bachleda	ZŠsMŠ L. Hrádok	8.	–	–	–	–	0,00	0,00	25,39
44	Lenka Lackovičová	ZŠ Bučany	8.	–	–	–	–	0,00	0,00	24,46
45	Miroslav Pastierik	SOŠ Polytech. Priev.	10.	–	–	–	–	0,00	0,00	23,00
46	Michal Fajmon	ZŠsMŠ L. Hrádok	8.	–	–	–	–	0,00	0,00	21,58
47	Ivan Čemez	ZŠ ĽŠ Šaľa	8.	–	–	–	–	0,00	0,00	19,52
48	Max Kodada	ZŠ ĽŠ Šaľa	8.	–	–	–	–	0,00	0,00	18,56
49	Eva Krajčová	ZŠ Vikartovce	9.	2	3	1	3	0,00	9,00	15,00
49	Natália Krempaská	ZŠ Vikartovce	9.	2	3	1	3	0,00	9,00	15,00
51	Dominika Žigrayová	CZŠ Ž. Bosniakovej	9.	–	–	–	–	0,00	0,00	14,00
52	Katarína Mančužková	CZŠ Ž. Bosniakovej	8.	–	–	–	–	0,00	0,00	13,20
53	Matej Macháč	G Piešťany	13.	–	2	5	1	-2,00	6,00	12,00
54	Lukáš Otruba	CZŠ Ž. Bosniakovej	9.	–	–	–	–	0,00	0,00	11,00
54	Barbora Močkorová	CZŠ Ž. Bosniakovej	9.	–	–	–	–	0,00	0,00	11,00
56	Juraj Májek	G BA Grösslingova	7.	–	–	–	–	0,00	0,00	7,33
57	Samuel Hapák	FMFI UK	15.	*	*	–	–	0,00	0,00	0,00

otazky@fks.sk