

Fyzikálny korešpondenčný seminár

3. ročník, 2009/2010

UFO, KTFDF FMFI UK, Mlynská dolina, 84248 Bratislava

e-mail: otazky@fks.sk

web: <http://ufo.fks.sk>

Vzorové riešenia 1. kola zimnej časti 2009/2010

1.1 Vlaky (opravoval Marcel, vzorák Bzdušo)

Na trati sa míňajú dva vlaky. Jožko sedí v prvom z nich a všimol si, že druhý vlak prefrčal okolo neho za čas 8 sekúnd. Iný Jožko sediaci v druhom vlaku si všimol že prvý vlak prefrčal okolo neho za 10 sekúnd. Ako dlho sa vlaky míňali?

Čaute bubáci! Ukážem vám dva spôsoby, ako sa dala úloha vyriešiť. Pri prvom spôsobe trochu potrápime svoje závitky, ale výsledok nájdeme „z hlavy“, v druhom spôsobe si zapíšeme dáke rovnice a z nich už niečo dostaneme.

Spôsob prvý – Zatnem hlavu a myslím: V prvom rade si treba uvedomiť nasledovný fakt: *Bez ohľadu na to, v ktorej časti vlaku Jožko stojí, druhý vlak okolo neho prefrčí za rovnaký čas 8 sekúnd.*¹ To isté samozrejme platí aj o Jožkovi sediacom v druhom vlaku: *Bez ohľadu na to, v ktorej časti druhého vlaku stojí druhý Jožko, prvý vlak okolo neho prefrčí za rovnaký čas 10 sekúnd.*

Teraz trik: Keďže je úplne jedno, kam Jožkov umiestnime, tak ich umiestnime *takto*: Nech sa prvý Jožko nachádza na úplnom začiatku prvého vlaku (tj. tento Jožko je rušňovodič), druhý na samom konci druhého vlaku a sledujte, čo sa bude diať:

- Vlaky sa stretnú prednými časťami (začínajú sa *míňať*). Jožko-rušňovodič uvidí, ako okolo začne prefrčovať druhý vlak.
- Po 8 sekundách druhý vlak úplne prefrčal okolo Jožka-rušňovodiča. V tomto momente uvidí vedľa seba druhého Jožka. Druhý Jožko vidí, ako okolo neho práve *začal* prefrčovať prvý vlak.
- Po ďalších 10 sekundách prvý vlak úplne prefrčal okolo druhého Jožka. To znamená že zadné časti vlakov sú vedľa seba. (prestali sa *míňať*).

Šikovne sme si teda celé *míňanie* vlakov rozdelili na čas, kedy druhý vlak frčí okolo prvého Jožka a naopak. To je úplne fantastické! Po úvahe dostávame, že vlaky sa *míňajú* $8 + 10 = 18$ sekúnd. Nepotrebuje poznať dĺžku ani rýchlosť žiadneho z vlakov.

¹Ak Ti nie je jasné, prečo by to tak malo byť, najprv si prečítaj druhý spôsob riešenia a až potom si pozri tento. Vážne! :-)

Seminár podporujú:



iuventa

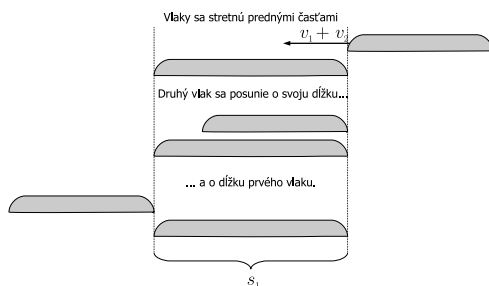
Spôsob druhý – Pero, papier a búšim: Aby sme mohli napísať dáke rovnice, zavedme si označenie v_1, v_2 pre rýchlosti vlakov a s_1, s_2 pre ich dĺžky.² Čo s tým? Jožko stojaci v jednom vlaku vidí druhý vlak dĺžky s_2 približovať sa súčtom rýchlostí $v_1 + v_2$. Celý vlak okolo neho prefrčí za

$$\frac{s_2}{v_1 + v_2} = 8 \text{ s},$$

Jožko v druhom vlaku uvidí prefrčať prvý vlak dĺžky s_1 opäť rýchlosťou $v_1 + v_2$, takže prvý vlak okolo neho prefrčí za

$$\frac{s_1}{v_1 + v_2} = 10 \text{ s},$$

Teraz sa pozrime na situáciu z pohľadu Jožka v prvom vlaku. Je to trochu sebec, preto si predstavuje, že jeho vlak stojí a druhý sa okolo neho hýbe rýchlosťou $v_1 + v_2$. Skúmajúc svet zo svojej *vzťažnej sústavy* pozoruje toto:



Obr. 1: Jednotlivé fázy stretávanie sa vlakov

To znamená, že pre hľadaný čas t *míňania sa* vlakov platí

$$\begin{aligned} t &= \frac{s_1 + s_2}{v_1 + v_2} \\ &= \frac{s_1}{v_1 + v_2} + \frac{s_2}{v_1 + v_2} \\ &= 8 \text{ s} + 10 \text{ s} \\ &= 18 \text{ s} \end{aligned}$$

Pripojil by som ešte jeden vtíp o Čukčoch, ale tento vzorák je už príliš dlhý. Tak nabudúce! :-)

1.2 Strom (opravovali Bea a Zuzka)

Nájdite si niekde na okolí vysoký strom, ktorý osamotene stojí na širokej lúke a zmerajte jeho výšku. K dispozícii máte meracie pásmo (alebo špagátik známej dĺžky), bravčové karé, tanier naplnený vodou, svoj ostrozrak, ladičku, tyč (je však oveľa kratšia ako strom). Dodržujte všetky zásady bezpečnosti pri práci, vyhýbajte sa kýčajúcim ošípaným a na strom sa neštvrajte. Kde vznikajú vo vašom meraní najväčšie nepresnosti?

²My ich síce nepoznáme (ani ich zo zadania nevieme vypočítať), ale to nám nebráni v ich používaní. Ony existujú, teda sa za nimi skrývajú nejaké presné čísla. Sú iba trochu „skryté“.

V riešení tejto úlohy sa využívajú vlastnosti podobných trojuholníkov, preto skôr, než prejdeme k samotnému zadaniu úlohy, si vysvetlíme, čo to tá podobnosť vlastne je a ako funguje. Nasledovať budú tri rôzne postupy, ako odmerať výšku stromu. Raz strom odmeriame pomocou tyče a jej tieňa za slnečného počasia. Pri druhom spôsobe tiež uplatníme tyč, no môže byť aj pod mrakom. Do tretice zmeriame strom pomocou taniera s vodou.

Podobné trojuholníky: Hovoríme, že dva trojuholníky sú podobné vtedy, keď jeden je len zväčšeninou (zmenšeninou) druhého. Inak povedané, trojuholník Ferko vieme vyrobiť z trojuholníka Miška tak, že *dĺžku každej strany Miška prenásobíme rovnakým číslom*. Ak mal teda Miško strany a, b, c a Ferko a', b', c' , platí: $a'/a = b'/b = c'/c = k$, kde k vyjadruje, koľko krát je Ferko väčší ako Miško. Všimnime si teraz, čomu sa rovná pomer strán a', b' Ferka. Stačí si uvedomiť, že Ferko má všetky strany k -krát väčšie ako Miško a zisťujeme

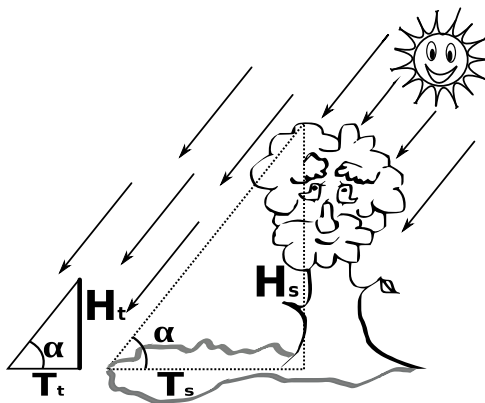
$$a'/b' = (ka)/(kb) = a/b,$$

teda pomer dvoch strán Ferka je rovnaký, ako pomer príslušných strán Miška. Podobná vlastnosť samozrejme platí pre všetky dĺžky v oboch trojuholníkoch, nielen pre strany, ale aj pre výšky, ťažnice, osi strán, ... No a posledná užitočná a intuitívna vlastnosť je, že dva trojuholníky sú podobné práve vtedy, keď majú rovnaké uhly.

Meranie tieňom: Prvý spôsob merania výšky stromu, ktorý by sme vám v tomto vzorovom riešení chceli predstaviť, je porovnávanie tieňa stromu s tieňom tyče. Pokiaľ sa nám podarí zapichnúť tyč dostatočne kolmo (to môžeme zabezpečiť použitím špagátika na konci s bravčovým karé ako olovnice), a aj strom rastie pekne nahor (obr. 2), máme dva podobné trojuholníky (oba trojuholníky majú pri jednotlivých vrcholoch rovnaké uhly). Pomer dĺžok tieňa stromu a tieňa tyče T_s/T_t je rovnaký ako pomer výšky stromu a výšky tyče H_s/H_t . Túto rovnosť upravujeme:

$$\begin{aligned} H_s/H_t &= T_s/T_t \\ H_s &= H_t T_s/T_t \end{aligned}$$

V tomto prípade sa najväčších nepresností dopustíme, ak naša tyč nie je zapichnutá kolmo alebo ak meriame na poludnie a tieň nie sú dostatočne dlhé.



Obr. 2: Tieň tyče a stromu

Tyč a zamračené počasie: Pokiaľ slnko zájde za mrak, netreba zúfať, máme k dispozícii aj ďalšie metódy. Chytíme do ruky tyč do známej vzdialenosti D_t od nášho oka. Vlastnými silami zabezpečíme aby tyč bola rovnobežná s meraným stromom. Tým sme zabezpečili zhodné uhly v trojuholníkoch na obrázku 3. Potom ustúpime od stromu (alebo sa k nemu priblížime) do vzdialenosti D_s tak, aby jeden koniec tyče zakrýval spodok stromu a druhý vrch (obr. 3). Takže pomer vzdialeností H_t/D_t sa rovná pomeru vzdialeností H_s/D_s . Z toho vyplýva, že hľadaná výška stromu je:

$$\begin{aligned} H_s/D_s &= H_t/D_t \\ H_s &= H_t D_s/D_t \end{aligned}$$

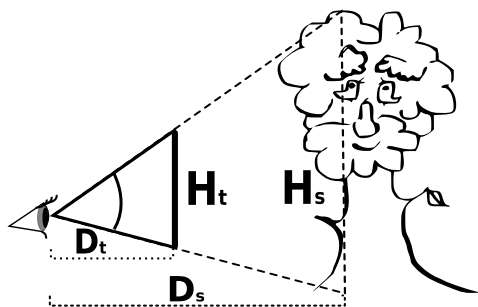
Najväčšie nepresnosti, rovnako ako pri predošlom postupe, vznikajú, keď tyč nie je rovnobežná so stromom.

Tanier s vodou: A nakoniec jeden veľmi pekný spôsob. Zoberieme si tanier naplnený vodou, položíme ho na zem do vzdialenosti S_s od stromu. Snažíme sa postaviť tak, aby sme v tanieri uvideli odraz vrcholca stromu. Keď sa nám to konečne podarí a odraz uvidíme, zaznačíme si našu aktuálnu vzdialenosť od taniera S_o . Ešte si zistíme výšku našich očí nad zemou H_o a môžeme ísť počítať.

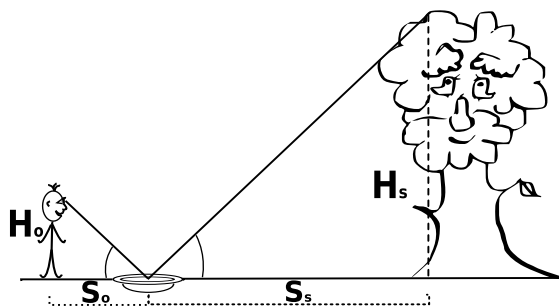
Vieme, že svetlo sa od hladiny vody odráža pod takým istým uhlom, pod akým na ňu dopadá. Opäť teda dostávame podobné trojuholníky, ako sa môžete presvedčiť na obrázku 4. Pomerly zodpovedajúcich si strán trojuholníkov sú teda rovnaké a my dostávame a rovnou riešime rovnicu:

$$\begin{aligned} H_s/H_o &= S_s/S_o \\ H_s &= H_o S_s/S_o \end{aligned}$$

Toto meranie je pomerne presné, keďže človek zvykne byť schopný stáť rovno a väčšina stromov tiež. Chyby sú spôsobené najmä nepresnosťami pri meraní.



Obr. 3: Meranie pod mrakom



Obr. 4: Meranie s tanierom

Vaše riešenia: Mnohí z vás správne teoreticky popísali, ako by sa dala výška stromu odmerať, no nanešťastie nemohli dostať plný počet bodov, lebo žiaden strom neodmerali. V zadaní sa jasne píše, aby ste si vyhliadli a *zmerali strom*. Teoretický návod, ako to spraviť, nestačí. Niektorí z vás nás však potešili a stromy naozaj pomerali a pre zaujímavosť uvádzame priemernú výšku stromov z vašich riešení: 5,5 metra.

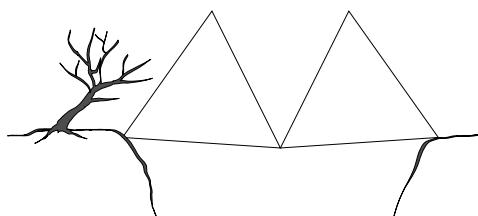
1.3 Most (opravovala Halucinka, vzorák Marcelka)

Kubus bol cez prázdniny v Čiernej Hore. Okrem toho, že krajina vôbec nevyzerala čierna, ho zaujali železnice, ktoré musia v Čiernej Hore zápasit' s hlbokými kaňonmi križujúcimi túto obrovskú náhornú plošinu. Jeden z mostov, ktorý kubus videl, vyzeral takto:

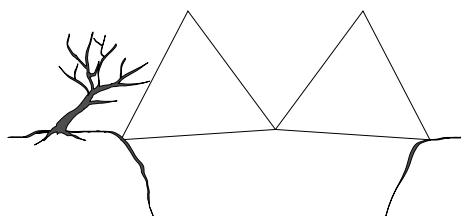
Všetky tyče z ktorých je most postavený majú rovnakú dĺžku a na koncoch sú upevnené v kĺboch, ktoré tyčiam nebránia otáčať sa. Najľavší a najpravší bod konštrukcie je položený na zemi. Pozrime sa na najvrchnejšiu vodorovnú tyč mosta.

- (5 bodov) Bude kvôli tiaži vlaku a samotného mosta natahovaná alebo stláčaná?
- (4 body) Nakreslite, ako sa zhruba zdeformuje most, ak túto tyč odstránime.

Najprv si rozmyslíme odpoveď časti b). Keď odstránime hornú tyč, dovolíme zvyšným trojuholníkom trochu sa pootočiť – môže teda nastať jeden z nasledovných dvoch prípadov:



Obr. 5: Prehnutie dole



Obr. 6: Prehnutie hore

Nič iné sa s konštrukciou diať nemôže: tyče sú z veľmi tuhého materiálu a dá sa predpokladať, že svoju dĺžku zmenia iba trochu. Stačí teda rozhodnúť, ktorý z dvoch nakreslených prípadov nastane. Správna odpoveď je ten prvý. Dôvodom je, že veci zvyknú sami od seba padať dole – keď zotnete strom, spadne; keď pustíte loptičku, spadne... Vo fyzike sa preto hovorí, že „sústava sa snaží zaujať stav s čo najnižšou potenciálnou energiou“ alebo „sústava sa snaží mať svoje ťažisko čo najnižšie“. Všimnime si, že v prvom prípade sa ťažiská trojuholníkov a tiež vlaku pohnú o kúsok nadol, v druhom prípade o kúsok nahor. Most sa zdeformuje preto tak, ako na prvom obrázku. Ak neveríte, môžete sa o tom presvedčiť napríklad tak, že si zo špajdlí a lepiacej pásky takú konštrukciu postavíte a skúsíte do stredu niečo zavesiť.

Po vyriešení časti b) je už jednoduché odpovedať na otázku z časti a). Už vieme, že po odstránení vrchnej tyče sa trojuholníky pootočia smerom k sebe. To spôsobí, že sa vzdialenosť ich horných vrcholov zmenší. Vrchná tyč je preto stláčaná.

1.4 Kladky (opravovali Aďa a (-E Filip, vzorák Marek)

Pozrite sa na sústavu kladky + páka na obrázku. Je možné pomocou takéhoto zariadenia zdvihnúť človekom osobný automobil? Automobil váži 1 600 kg, človek dokáže ťahať lano silou najviac 600 N. Zľava je na páku lano priviazané vo vzdialenosti 20 cm od osi otáčania, sprava 100 cm. Pokiaľ neviete s touto úlohou pohnúť, na našej stránke (<http://ufo.fks.sk>) nájdete krátky učebný text, ktorého prečítanie vám môže pri riešení úlohy pomôcť.

Najskôr si vyskúšame, či by vôbec náš človek auto udržal, keby už bolo zdvihnuté. Auto váži 1 600 kg, takže gravitácia na neho pôsobí silou $F_g = mg = 1\,600\text{ kg} \cdot 10\text{ N/kg} = 16\,000\text{ N}$. Touto silou pôsobí aj automobil na kladkostroj, na ktorom visí. Ten sa skladá

len z jednej voľnej a jednej pevnej kladky. Auto je zavesené na dvoch lanách. Každé z nich je teda napínané silou $F_1 = F_g/2 = 8\,000\text{ N}$ a touto silou aj pôsobí na ľavú stranu páky. Teraz použijeme momentovú vetu:

$$M_1 = M_2$$

$$F_1 r_1 = F_2 r_2$$

$$F_2 = F_1 r_1 / r_2 = 8\,000 \cdot 20 / 100 = 1\,600\text{ N}$$

Takže pravá strana páky pôsobí na lano silou $F_2 = 1\,600\text{ N}$ a keďže pevná kladka, ktorá nasleduje, mení len smer sily, je to aj sila ktorou musí ťahať náš človek aby auto udržal. Ten však dokáže vyvinúť silu len 600 N , takže auto neudrží. Teraz sa dúfam zhodneme, že ak auto ani neudrží, tak ho ani nezdvihne.

Toto je bežný postup ako riešiť túto úlohu. Ale pre zanietenejších tu máme aj postup od ich zdatnejších starších kolegov z FKS, konkrétne Mariána Horňáka a Mateja Baloga. Neradi by sme vás o neho pripravili. Tu je:

Čo sa stane ak ujo potiahne lano smerom dole o dĺžku Δd (ktorá je nekonečne malá)? Lano zdvihne koniec páky o výšku Δd . Druhý koniec páky je päťkrát bližšie k osi otáčania ($100\text{ cm}/20\text{ cm} = 5$), preto klesne o $\Delta d/5$ (vychádzam z podobnosti trojuholníkov) a o túto vzdialenosť stiahne aj lano na ňom upevnené. Keďže voľná kladka je zavesená na dvoch lanách, tak sa zdvihne o polovicu, čiže o $\Delta d/10$. Pretože jednoduchými strojmi sa práca nedá ušetriť, ak človek zdvíha silou F_c , vynaloží prácu W_c , ťažová sila pôsobiaca na auto je $F_g = m_g = 16\,000\text{ N}$ a potenciálna (polohová) energia auta sa zmení o ΔE_a , potom platí:

$$W_c = \Delta E_a$$

$$F_c \cdot \Delta d = F_g \cdot \Delta d / 10$$

$$F_c = F_g / 10 = 1\,600\text{ N}$$

Takže ujo by mal ťahať silou

$$F_c = 1\,600\text{ N}$$

ale on dokáže iba 600 N , čiže auto nie je možné zdvihnúť.