Fyzikálny korešpondenčný seminár
4. ročník, 2010/2011
UFO, KTFDF FMFI UK, Mlynská dolina, 84248 Bratislava
e-mail: otazky@fks.sk web: http://ufo.fks.sk

Vzorové riešenia 3. kola letnej časti 2010/2011

3.1 Čínsky múr (opravoval Jano, vzorák Samo)

Čínska ľudová republika prišla s ďalším impozantným plánom: Čínsky múr postaviť okolo celého sveta! Odhadnite, o koľko by stúpla hmotnosť Zeme, keby sme postavili okolo rovníka päťdesiat metrov široký a päť metrov vysoký múr. Uvažujte priemernú hustotu múru $\rho = 3\,500\,\mathrm{kg/m^3}$.

Tento príklad bol chyták. Hmotnosť Zeme sa samozrejme nezmení, pretože materiál na stavbu múru berieme zo Zeme.

3.2 Ťažisko (opravoval Polik)

Katka si vystrihla z papiera štvorec so stranou dlhou $20\,\mathrm{cm}$. Zdal sa jej akýsi veľký, tak z jeho pravého horného rohu vystrihla menší štvorček so stranou $10\,\mathrm{cm}$. Veselá Katka si vzala svoj štvorček a bola preč. Nám zostal divný útvar a otázka na jazyku. Kde máš ťažisko? Nájdite ťažisko útvaru na obrázku.

Čaute decká, tento príklad Vás riešilo mnoho a čo ma potešilo, tak sa vyskytlo aj mnoho druhov riešení. Niektoré boli zaujímavé a správne, na iných ste zistili, ako sa k tomuto príkladu pristúpiť nedá.

Teoretická príprava: Ťažisko, občas nazývané aj hmotný stred, je bod, ktorý je v strede telesa vzhľadom na jeho hmotnosť. Vysvetlime si, čo to znamená a ako ťažisko hľadať.

Najjednoduchšie nájdeme ťažisko jedného hmotného bodu, ten má ťažisko presne tam, kde sa nachádza. Podobne jednoduché je nájsť ťažisko dvoch rovnako hmotných bodov, ťažisko bude ležať presne v strede medzi nimi. Čo však robiť, ak hmotnosti nie sú rovnaké a jeden hmotný bod je napríklad dvakrát ťažší ako druhý? Vtedy, v zhode s našou intuíciou, ťažisko leží opäť na spojnici oboch bodov, avšak dvakrát bližšie k ťažšiemu bodu. Ak označíme body B_1 a B_2, pre ich ťažisko T platí

$$\frac{|B_1T|}{|B_2T|} = \frac{m_2}{m_1}\,.$$

Doteraz sme sa zaoberali tým, ako nájsť ťažisko hmotných bodov, v praxi však častejšie pracujeme s celými telesami. Vtedy nám pomôže nasledovné tvrdenie:

Ak nahradíme každé teleso hmotným bodom umiestneným do jeho ťažiska s hmotnosťou rovnou hmotnosti telesa, spoločné ťažisko telies sa nezmení.

Vyzbrojení týmito znalosťami sme pripravení pustiť sa do riešenia úlohy.

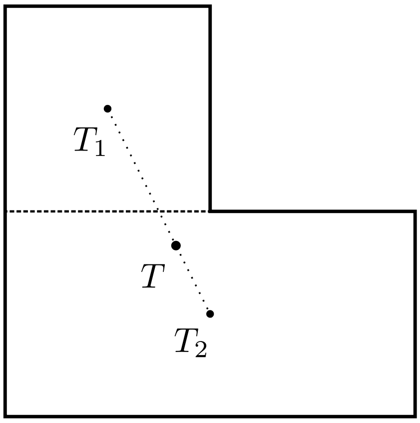
Seminár podporujú:

Riešenie Všimneme si, že útvar na obrázku sa dá rozdeliť na štvorec $10\,\mathrm{cm} \times 10\,\mathrm{cm}$ a obdĺžnik $20\,\mathrm{cm} \times 10\,\mathrm{cm}$. Ťažisko štvorca aj obdĺžnika sa nachádzajú v ich strede – v mieste, kde sa pretínajú uhlopriečky. Obdĺžnik má dvakrát väčšiu hmotnosť, preto bude ťažisko dvakrát bližšie k nemu ako ku štvorcu. Vieme ho vyznačiť geometricky na obrázku, prípadne spočítať jeho polohu. Ťažisko obdĺžnika sa nachádza vo výške 5 cm, ťažisko štvorca vo výške 15 cm. Výsledné ťažisko má byť dvakrát bližšie k ťažisku obdĺžnika, preto jeho výška bude

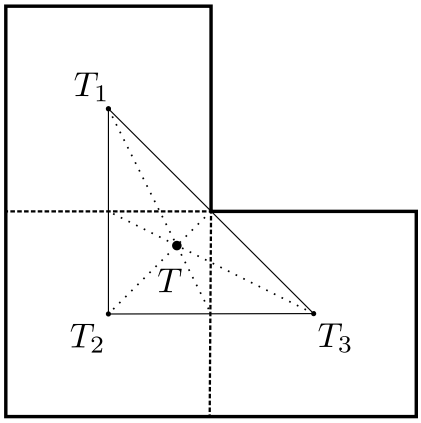
$$\frac{2 \cdot 5\,\mathrm{cm} + 15\,\mathrm{cm}}{3} \approx 8{,}3\,\mathrm{cm}\,.$$

Úplne rovnakou úvahou zistíme, že jeho vzdialenosť od ľavého okraja je rovnako 8,3 cm.

Toto však nie je jediné možné riešenie. Útvar sa dá rozdeliť aj na tri zhodné štvorce, každý s ťažiskom v strede a nám zostáva nájsť ťažisko troch rovnakých bodov – teda trojuholníka. A nájsť ťažisko trojuholníka je už hračka, stačí si spraviť priesečník dvoch ťažníc.



Obr. 1: Prvý spôsob



Obr. 2: Druhý spôsob

Na domácu úlohu sa môžete zamyslieť nad tým, prečo je ťažisko vyplneného trojuholníka a ťažisko troch vrcholov tohto trojuholníka rovnaké. To isté samozrejme platí aj pre štvorec.

3.3 Čaj (opravoval Polik)

Samo je strašne smädný a dostal chuť na čaj. Nemá však v pláne čakať, kým čerstvo uvarený čaj vychladne a preto si doň sype kocky ľadu. Zistite, ako sa zmení teplota čerstvo uvareného čaju, ak doň vhodíme 50 g ľadu. Objem čaju v hrnčeku je 200 ml, pri roztopení ľad prijme 330 kJ na každý kilogram hmotnosti. Merná tepelná kapacita vody je $4{,}2\,\frac{\mathrm{kJ}}{^\circ\mathrm{C\,kg}}$.

Táto úloha bola pomerne jednoduchá, no ľahko sa v nej dalo na niečo zabudnúť, tak si teda vysvetlime v čom bol háčik.

Ak ohrievame ľad po dosiahnutí teploty 0 °C, jeho teplota sa prestane zvyšovať a všetko dodávané teplo sa spotrebúva na jeho roztápanie až dovtedy, kým sa celý ľad neroztopí. Koľko energie treba ľadu dodať, aby sa celý roztopil, sme vám prezradili v zadaní, je to $l = 330\,\mathrm{kJ/kg}$. Čo sa však stane s ľadom po roztopení? Je z neho voda s teplotou 0 °C a táto voda ďalej ochladzuje horúci čaj. To znamená, že energia vriaceho čaju sa musí odovzdať na roztopenie ľadu a potom na ohriatie vody, ktorá z tohto ľadu vznikla.

Začnime tým, že zistíme, ako sa ochladí čaj len vďaka roztopeniu sa ľadu. Ľad na svoje roztopenie spotrebuje energiu

$$Q = lm_{\text{ľadu}} \approx 0{,}05\,\mathrm{kg} \cdot 330\,\mathrm{kJ} = 16{,}5\,\mathrm{kJ}\,.$$

To spôsobí pokles teploty vody o

$$\frac{Q}{cm_{\text{vody}}} \approx \frac{16{,}5\,\mathrm{kJ}}{0{,}2\,\mathrm{kg} \cdot 4{,}2\,\frac{\mathrm{kJ}}{^\circ\mathrm{C\,kg}}} \approx 19{,}6\,^\circ\mathrm{C}\,.$$

Po roztopení máme 50 ml vody teploty 0 °C a 200 ml vody teploty 80,4 °C. Teplota sa po čase ustáli na ich priemere, to je

$$\frac{200 \cdot 80{,}4\,^\circ\mathrm{C} + 50 \cdot 0\,^\circ\mathrm{C}}{250} \approx 64{,}3\,^\circ\mathrm{C}\,.$$

Názov postupu, ktorý sme pri riešení predviedli, v škole učene volajú „riešenie kalorimetrickej rovnice“. Ako ste však sami videli, bola to len trocha zdravého sedliackeho rozumu, znalosti prírody a aritmetického priemeru. Z tejto úlohy si tak v zásade môžete odniesť dve ponaučenia

(i) Učené názvy nie sú dôležité, dôležitý je rozum, nikdy sa nimi preto nenechajte zastrašiť

(ii) Chladiť nápoje ľadom sa fakt oplatí

Do sčajenia priatelia!

3.4 P'Olikova plavba (opravoval Samo)

Poli sa vydal na plavbu okolo sveta vo svojej plťke tvaru krabice od topánok. Ultraľahký materiál, z ktorého bolo plavidlo vyrobené, nevážil nič. Keď stál Poli v loďke sám, hladina vody siahala do výšky $h_1 = 30\,\mathrm{cm}$ odo dna loďky. Aby Polimu smutno, pristúpila k nemu v prostred plavby Marika. V tom momente sa čiara ponoru zvýšila na $h_2 = 50\,\mathrm{cm}$. Ak viete, že Marika váži 53 kg, zistite, akú hmotnosť má Polik.

Kľúčom k vyriešeniu tejto úlohy je odhaliť súvislosť medzi hĺbkou ponoru a hmotnosťou nákladu. Tu nám pomôže Archimedov zákon v znení:

Teleso ponorené do vody je nadľahčované silou rovnou tiaži vody s rovnakým objemom, ako je objem ponorenej časti telesa.

Keďže Polikova loďka má tvar krabice, objem jej ponorenej časti je priamo úmerný jej hĺbke ponoru. Tu je veľmi dôležité si uvedomiť, že toto platí len preto, že loďka má takýto tvar, pre priemyselne vyrábané lode toto tvrdenie neplatí.

Ak má Polik s loďkou plávať, musí byť nadľahčovaný silou rovnou jeho vlastnej tiaži, z tejto a predošlých úvah zisťujeme, že hĺbka ponoru je priamo úmerná hmotnosti nákladu na loďke.

Ak teda 53 kg ťažká Marika zvýši ponor o 20 cm, na ponor 30 cm je potrebná hmotnosť:

$$53\,\mathrm{kg} \cdot \tfrac{3}{2} \approx 80\,\mathrm{kg}\,.$$

A to je Polikova hmotnosť.

Všetci, čo tento príklad poslali, mali správny výsledok. Nanešťastie väčšina z Vás sa k nemu dopracovala nesprávnou úvahou v štýle: „Poznáme tri čísla, treba ich nejako vydeliť (použiť trojčlenku)[1] aby sme dostali štvrté.“ Náhodou ste sa trafili, avšak ak by bol príklad čo len trochu komplikovanejší a loďka by nemala tvar krabice, ale napríklad tvar polgule, Vaše riešenie by dalo nesprávny výsledok. Správne riešenie jednoducho musí obsahovať zdôvodnenie, prečo je výsledok taký, ako tvrdíte. Berte si príklad z tohto vzoráku.

[1] nevhodné preškrtnite