

Vzorové riešenia 1. kola zimnej časti 2011/2012

1.1 Stihne Fajo lietadlo? (opravoval Paťo)

Nevieme, ale držíme mu palce. Gate sa uzatvára o 9:45, Fajove hodinky ukazujú čas 9:40. Dovtedy musí prejsť ešte 1 000 metrov, našťastie mu pomôžu vodorovné eskalátory. To sú vodorovné pásy pohybujúce sa rýchlosťou 5 km/h, ktoré nájdete na väčších európskych letiskách. Fajo, majster Slovenska v behu s batožinou na tisíc metrov, by bez ich pomoci prebehol zostávajúcu vzdialenosť za sedem minút a lietadlo tesne nestihol. Pomôžu mu pásy, aby mu let neušiel? Svoju odpoveď poriadne zdôvodnite.

Hlavná otázka je, či prebehne Fajo vzdialenosť 1 000 m, keď mu pritom budú pomáhať aj pásy. Zo zadania vieme, aký čas na to Fajo má. Keďže mu hodinky ukazujú 9⁴⁰ a „gate“ sa uzatvára o 9⁴⁵, má na to 5 minút.

Vidíme, že rýchlosť pásov je zadaná priamo, a to 5 km/h. Nevieme však, akou rýchlosťou vie Fajo utekať. Jeho rýchlosť si vieme vypočítať ako podiel dráhy a času, lebo vieme, že prebehne dráhu 1 km za 7 minút = $\frac{7}{60}$ h Jeho rýchlosť je dráha lomeno čas, teda $\frac{60}{7}$ km/h.

Fajova rýchlosť samotná mu však nestačí na šťastný odlet. Tak prečo by nemohol naskočiť na pás a rozbehnúť sa na ňom? Beží po pásoch, ktoré naviac „bežia“ v rovnakom smere ako on. Takže vzhľadom na zem sa Fajo bude približovať ku gatu súčtom jeho rýchlosti a rýchlosti pásov:

$$\left(\frac{60}{7} + 5\right) \text{ km/h} = \frac{95}{7} \text{ km/h}.$$

Dráhu 1 kilometer prejde teda za čas

$$t = \frac{s}{v} = \frac{1 \text{ km}}{\frac{95}{7} \text{ km/h}} = \frac{7}{95} \text{ h} = 4 \text{ min } 25 \text{ s},$$

čo je menej ako 5 minút. To znamená, že Fajo predsa len lietadlo stihne.

1.2 Palacinky (opravovali Samo Cibufka a Jano)

Keď som robil palacinky, nemal som práškový cukor a musel som použiť kryštálový. Zmiešal som deci hladkej múky a deci kryštálového cukru a zdalo sa mi, že je toho nejakú málo. Je možné, že som dostal menej ako dva deci výslednej zmesi? Overte experimentálne a čo najpresnejšie zistite, koľko percent objemu strácam po zmiešaní. Viete vysvetliť, prečo tento jav nastáva? Ak áno, tak mi to prosím vysvetlite.

Na túto sladkú úlohu sa najprv pozriem experimentálne. Budem potrebovať nejakú nádobu, v ktorej viem rozumne merať objem. Ako by mala vyzeráť taká nádoba? Ideálny je odmerný valec, ten však väčšina z vás v kuchyni neskladuje. Prečo je odmerný valec

super? Pretože má jeden dielik stupnice menší ako nádoby v domácnosti. A taktiež je úzky, takže vyrovnáť hladinu je v ňom podstatne jednoduchšie, ako v širšej nádobe.

Zoberiem si teda nádobu, ktorá má podobné vlastnosti. Najlepšie je po odmeraní múky ju odsypať do inej nádoby, odmerať cukor a nasypať ju späť. Zabrániame tým, že pri tom ako múku sypeme zhora sa to už nejako premieša.

Teraz poriadne zamiešať, odmerať objem a dať ho do pomeru s objemom nezmiešanej zmesi.

$$\text{zmena} = 100 \% \cdot V_{\text{po zamiešaní}} / (V_{\text{cukor}} + V_{\text{múka}})_{\text{pred zmiešaním}}$$

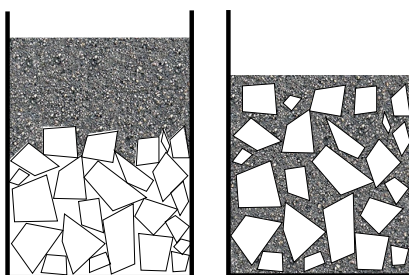
a mám výsledok. Výsledná hodnota môže ležať niekde medzi 75 % až 90 % v závislosti od druhu cukru, alebo hrudkovitosti múky.

Nejaké takéto číslo ste dostali aj vy, slabý dôraz ste však kládli na presnosť riešení. Ako by sme mohli takéto meranie spresniť? Vieme aký objem prislúcha jednému dieliku. Tiež si vieme zmerať, aký vysoký je jeden dielik. Potom sa môžeme pozrieť na prvý spodný dielik pod hladinou, odmeriame pravítkom koľko ostalo nad tým dielikom a použijeme trojčlenku na vyrátanie tohoto objemu. Potom sme limitovaný už iba presnosťou pravítka, ktorá je asi 0,5 mm.

Taktiež sme mohli použiť väčšie množstvo múky a cukru, avšak ich objemy museli byť v pomere 1:1. A ak by ste nemali nádobu so stupnicou, stačí taká, ktorá má v každej výške rovnaký prierez. Potom bude pomer dvoch objemov rovnaký, ako pomer dvoch výšok. Spravím si do nádoby dve čiarky, jednu vo výške h a druhú v $2h$. Nasypem si cukor po prvú čiarku, dosypem múku po druhú čiarku. Už len poriadne premiešať, urovnať hladinu a urobím čiarku pokiaľ siaha. Môžem vidieť, že je nižšie, ako keď som tam mal nezmiešanú zmes.

Zmeriam výšku. Môžem si ju označiť x (meral som od spodku valca). Potom mi ostalo $100 \% \cdot x/h$. Je dobré urobiť viac meraní. Môže sa stať, že sa jedno bude líšiť od ostatných a takto zbadáme, či sme pri niektorom nespravili nejakú chybu.

Na získanie plného počtu bodov sa bolo treba zamyslieť aj nad presnosťou výsledku. Poďme si teda ešte ukázať ako odhadnúť presnosť merania. Ako sme už povedali vyššie, presnosť s akou meriame výšku múky/cukru a teda približne aj presnosť s akou meriame objem je pol dielika. Ak započítame aj nerovnosť povrchu, môžeme presnosť merania objemu odhadnúť na jeden dielik. Ak sme mali odmernú nádobu, kde bol jeden dielik 10 ml zmerali sme objem s takouto presnosťou. Odhad presnosti výsledku v percentách dostaneme tak, že presnosť 10 ml vydáme objemom cukru samotného (v našom prípade 1 dl).



Obr. 1: Cukor

Na záver podme k dôvodu, prečo to tak je. Kryštáliky cukru sú rádovo 100 krát väčšie ako zrnká hladkej múky. To je asi ako vziať futbalové lopty a hrach. Keď tie veľké nasy-peme do nádoby, zostanú medzi nimi prázdne medzery (úmerné veľkosti veľkých časič)¹, do ktorých by sa akurát popchali tie menšie, čo prispýeme navrch. Keď im pomôžeme pre-miešaním, nájde si každý „svoje miesto“. Bude to vyzeráť podobne, ako na obrázku. Teda zmena objemu nastala na úkor objemu medzier, ktorý sme pôvodne započítali k objemu cukru. Už zostáva iba niečo chutné upiecť z pripravenej zmesi. Dobrú chuť.

1.3 Stredný hmot (opravovali Tatika a Tinka)

Nájdite geometricky ťažisko útvaru na obrázku.

Nájdite geometricky ťažisko útvaru na obrázku. To je celkom krátke zadanie, nemyslíte? Práve preto musí obsahovať veľa informácií pokope. Skúsme si ich teda rozobrať.

„Nájdite geometricky...“ znamená, že to asi bude treba narysovať. Ale s obrázkom plným čiar a ich priesečníkov len ťažko niekoho presvedčíme o tom, že sme našli ťažisko. Preto oveľa dôležitejší než samotný nárys bude postup, akým sme ho skonštruovali, a zdôvodnenie, prečo postup funguje. „... ťažisko...“ je bod, ktorým môžeme nahradiť teleso pri niektorých fyzikálnych výpočtoch ak zanedbávame rozmery. „... útvaru na obrázku.“ Tento útvar je štvoruholník a označíme si ho $ABCD$.

Teraz, keď nám už je všetko jasné mohli by sme začať. Ale kde? Keď máme nejaký problém a nevieme s ním pohnúť, oplatí sa nám ho rozdeliť. Napríklad úsečkou AC . Dostaneme dva trojuholníky ABC a CDA . A v každom trojuholníku máme tri ťažnice, ktoré vzniknú spojením nejakého vrcholu a stredu protiláhlej strany. Všetky ťažnice sa potom pretínajú v jednom bode – ťažisku.

Takže vieme zostrojiť ťažisko T_B trojuholníka ABC a ťažisko T_D trojuholníka ADC . Hmotu štvoruholníka $ABCD$ sme teda rozdelili do týchto dvoch bodov. A teraz by sa ho-dilo nahradiť ich jedným. Kde bude ležať ťažisko dvoch hmotných bodov? Intuitívne musí ležať niekde medzi nimi, teda na úsečke $T_B T_D$. Bude to však v strede? Čo ak mal jeden z trojuholníkov väčší obsah? V jeho ťažisku sa toho skoncentrovalo viac, teda spoločné ťažisko bude bližšie pri ňom. Takže pokiaľ nechceme rysovať veľmi škaredé veci tak sme na našom obrázku práve skončili.

Čo takto si nakresliť nový? Napríklad taký, kde si dokreslíme úsečku BD . Dostaneme trojuholníky DAB a BCD aj ich ťažiská T_A a T_C . A znova bude musieť platiť, že ich spoločné ťažisko leží na $T_A T_C$. Lenže to spoločné ťažisko je presne to isté ako na predchá-dzajúcom obrázku. Teda naše T musí ležať na $T_B T_D$ aj $T_A T_C$. A aký jediný bod to spĺňa? No predsa ich priesečník. Tak a máme ho!

1.4 Západ slnka (opravovali Janka a Polik)

Po úspešnom naplnení svojich podnikateľských vízií sa z Polika stal miliardár a začal si užívať svoje bohatstvo. O dva mesiace má výročie zoznámenia sa so svojou milovanou Zuzkou a chcel by na ňu spraviť dojem – pri najdlhšom západe slnka, aký kedy videla. Ako fyzik vie, že všetko, čo treba spraviť, je dostatočne rýchlo (tj. rýchlejšie ako slnko) letieť lietadlom smerom na západ. Aký rýchly tryskáč si potrebuje kúpiť na uskutočnenie tejto romantickej vízie, ak letí okolo rovníka?

¹Komu sa nepáči sypanie gulí a vie, že kryštáliky cukru sú malé kocky, ktoré by predsa mali pekne zapadnúť k sebe, nech si skúsi doma nasypať do nádoby LEGO kocky a uvidí.

Ako určíte viete, západ Slnka je v skutočnosti spôsobený otáčaním sa Zeme. Keby sa Zem netočila okolo svojej osi, Slnko by sme videli stále na tom istom mieste na oblohe.

Čo by mal Polik spraviť, aby doprial svojej milej večný západ Slnka? Stačilo by zastaviť rotáciu Zeme. Polik je bohatý dosť, ale takú moc nemá. Zostáva tu však ešte jedna možnosť – kúpiť tryskáč, nasadnúť doň a letieť proti smeru rotácie Zeme akurát takou rýchlosťou, aby voči Slnku stál.

Po chvíli zamyslenia prídeme na to, že to je presne taká rýchlosť, akou sa hýbe povrch Zeme. Zem má polomer približne 6 400 km, obvod rovníka je teda asi 40 000 km. Za 24 hodín sa celá Zem otočí, rovník sa teda pohybuje približne rýchlosťou 1 670 km/h. Rovnakou rýchlosťou, ale opačným smerom, musí ísť Polik, ak chce mať pred sebou stále západ Slnka.