Fyzikálny korešpondenčný seminár
6. ročník, 2012/2013
UFO, KTFDF FMFI UK, Mlynská dolina, 84248 Bratislava
e-mail: otazky@fks.sk web: http://ufo.fks.sk

Vzorové riešenia 3. kola letnej časti 2012/2013

3.1 Turista (opravoval Žaba)

Andrej rád chodí na túry. Naplánoval si, že stihne vlak o 14:30, ktorý mu ide z 12 km vzdialenej dediny. Vyrazil o 11:00 a rýchlosťou 3 km/h išiel 1,5 hodiny. Potom zistil, že to takto nestíha a zrýchlil na 5 km/h a touto rýchlosťou prešiel 2,5 km. To ho však vyčerpalo a spravil si prestávku 30 minút. Ako rýchlo musí Andrej ísť zvyšný kúsok cesty, aby stihol vlak? A aká bola jeho priemerná rýchlosť počas výletu?

Ahojte! Ako prvé vás musím všetkých pochváliť za veľmi pekné riešenia. Tomu aj zodpovedá veľký počet bodov, ktoré som rozdal. Niektorým som akurát vytkol trochu odfláknutý popis, tak si na to nabudúce dajte pozor.

Vrhnime sa teraz na vzorové riešenie. Andrej si svoju cestu rozdelil na štyri časti:

- V prvej išiel rýchlosťou $v_1 = 3\,\mathrm{km/h}$ po dobu $t_1 = 1{,}5\,\mathrm{h}$.
- V druhej zrýchlil na rýchlosť $v_2 = 5\,\mathrm{km/h}$ a prešiel takto dráhu $s_2 = 2{,}5\,\mathrm{km}$
- V tretej oddychoval, teda mal rýchlosť $v_3 = 0\,\mathrm{km/h}$ a zostal na mieste $0{,}5\,\mathrm{h} = t_3$.
- No a o štvrtej časti nevieme zatiaľ nič.

Naviac vieme, že celková dráha, ktorú musí prejsť, je $s = 12\,\mathrm{km}$ a má na to $t = 3{,}5\,\mathrm{h}$.

Poďme teraz vyrátať rýchlosť, ktorá mu bude stačiť na to, aby stihol vlak. Na to môžeme použiť známy vzťah pre výpočet rýchlosti $v = \dfrac{s}{t}$, kde s je dráha a t čas. Aby sme mohli použiť tento vzorec, potrebujeme zistiť, koľko kilometrov ešte potrebuje prejsť a koľko má na to času.

V prvej časti cesty nám chýba informácia, koľko kilometrov za ten čas vlastne prešiel. To si však vieme jednoducho vyrátať pomocou drobnej úpravy vyššie spomenutého vzorca: $s_1 = v_1 \cdot t_1$, z čoho po dosadení dostaneme, že $s_1 = 4{,}5\,\mathrm{km}$.

V druhej časti naopak potrebujeme zistiť čas, za ktorý danú dráhu prešiel. Opäť teda upravíme náš vzorec a dostaneme $t_2 = \dfrac{s_2}{v_2} = 0{,}5\,\mathrm{h}$. V tretej časti samozrejme $s_3 = 0\,\mathrm{km}$.

Ostalo mu teda prejsť dráhu

$$s_4 = s - s_1 - s_2 - s_3 = 12\,\mathrm{km} - 4{,}5\,\mathrm{km} - 2{,}5\,\mathrm{km} - 0\,\mathrm{km} = 5\,\mathrm{km}.$$

No a do odchodu vlaku zostáva

$$t_4 = t - t_1 - t_2 - t_3 = 3{,}5\,\mathrm{h} - 1{,}5\,\mathrm{h} - 0{,}5\,\mathrm{h} - 0{,}5\,\mathrm{h} = 1\,\mathrm{h}.$$

Seminár podporujú:
iuventa

Teda minimálna rýchlosť, ktorou musí ísť, aby stihol vlak, bude

$$v_4 = \frac{s_4}{t_4} = 5\,\mathrm{km/h}.$$

Ostáva nám už len otázka, akou priemernou rýchlosťou išiel počas celého výletu. Najskôr poznamenám, že sa tým myslí aj prestávka, keďže je súčasťou výletu, aj keď mal vtedy Andrej nulovú rýchlosť.

Stačí si uvedomiť, že priemerná rýchlosť vyjadruje takú rýchlosť, ktorou ak by šiel celý čas, prešiel by práve celú dráhu. Stačí nám teda zistiť podiel celkovej dráhy a celkového času:

$$v_p = \frac{s}{t} = \frac{12\,\mathrm{km}}{3{,}5\,\mathrm{h}} = \frac{120}{35}\,\mathrm{km/h} = \frac{24}{7}\,\mathrm{km/h} \approx 3{,}43.$$

3.2 Kanvica (opravoval Maťo G.)

Plná rýchlovarná kanvica naplnená studenou vodou zovrie za 3 minúty. Čajka si ju nechala zovrieť a čaj si zaliala $\frac{2}{3}$ vody z kanvice. Kajka si varila čaj hneď po nej, doliala kanvicu opäť do plna studenou vodou. Za aký čas zovrie voda jej?

Základný zmysel výpočtu bol jednoduchý, keď Kajka doliala kanvicu doplna, doliala 2/3 studenej vody a zvyšok (pri zanedbaní tepelných strát) zostal vo vare, takže ho už netreba zohrievať a teplo je potrebné dodať len 2/3 vody. Keďže výkon kanvice bude v obidvoch prípadoch rovnaký a pri druhom stačí zohriať 2/3 z pôvodného množstva, bude to trvať 2/3 pôvodného času, čiže 2 minúty.

Ale počkať! Predsa po zmiešaní studenej a vriacej vody prebehne medzi nimi tepelná výmena, čoho výsledkom bude, že celá voda v kanvici bude mať tú istú teplotu.[1] Bude platiť to isté, čo platilo, keď sme tepelnú výmenu nebrali do úvahy? Ukazuje sa že áno a dôvod je jednoduchý.

Pri tepelnej výmene platí, že vriaca voda stratí presne toľko tepla, koľko studená voda prijme.[2] Teraz si rozdeľme celkové teplo, ktoré musíme dodať vode, na dve časti: teplo na ohriatie premiešaných 2/3 vody (Q_1) a teplo na ohriatie premiešanej 1/3 vody (Q_2). Ľahko zistíme, že pri zmiešavaní vriaca voda stratila práve teplo Q_2, lebo rovnaké teplo teraz musí prijať na zohriatie na bod varu. Podľa nášho prvého tvrdenia v tomto odseku (podľa kalorimetrickej rovnice) však musela studená voda pri tepelnej výmene práve toto teplo prijať. To znamená, že keď chceme dodať na zohriatie zmiešanej vody do varu teplo $Q_1 + Q_2$, je to to isté teplo, ktoré musia studené 2/3 vody prijať na zohriatie na bod varu. A práve kôli tomu stačí rátať tak, ako sme rátali doteraz, teda akoby sme zohrievali len 2/3 vody a 1/3 by zostala stále vo vare.

A čo hovorí realita? Pri vymenení 2/3 vody bude výsledný čas naozaj dvojtretinový! Horšie to už funguje pre menšie zlomky, ako napríklad 1/5. Rýchlosť ohrievania vody totiž závisí od rozdielu teplôt a 10-stupňová voda sa od horúceho dna ohreje na 20 ℃ rýchlejšie, než 90-stupňová na 100 ℃.

Komentár k riešeniam. Mnohí ste neodôvodnene počítali tak, že zohrievame 2/3 vody. Za to sa strhával jeden bod. Niektorí ste pracne počítali kalorimetrickú rovnicu, teplá

[1] Konkrétne po napísaní kalorimetrickej rovnice nám vyjde $t_3 = \dfrac{2t_1 + t_2}{3}$, kde t_1 je teplota studenej vody, t_2 je teplota vriacej vody a t_3 je výsledná teplota vody po zmiešaní.

[2] Toto je aj podstata kalorimetrickej rovnice.

potrebné na zohriatie a aj čas, počas ktorého treba vodu zohrievať. Často ste dosádzali konkrétne hodnoty do výpočtov a tým vám jednak vychádzali nie úplne presné hodnoty a dvak ste to nepočítali pre všeobecnú hodnotu počiatočnej teploty. Nebojte sa všeobecných výpočtov. Ak budete správne upravovať vzorce, často sa vám veľa vecí vykráti a vyjde vám jednoduchý výsledok. Aspoň v UFe.

3.3 Štvorkladie (opravoval Dušan)

Edo zo známych príčin potrebuje zdvihnúť z podlahy kus železa neznámej váhy. Zostrojil si teda takýto kladkostroj: (viď zadania alebo Obr. 4) Aký najťažší kváder vie Edo zdvihnúť, ak ťahá silou najviac 700 N? Predpokladajte, že $g = 10\,\mathrm{N/kg}$ a kladky nič nevážia.

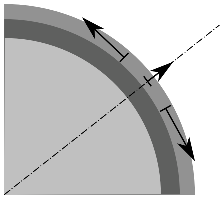
Táto úloha väčšine z vás nerobila problémy a vyriešili ste ju správne. Viete ako s kladkami počítať, avšak vo vašich riešeniach mi chýbalo zdôvodnenie, prečo sa práve tak správajú. Preto som sa rozhodol pridať do vzoráku aj toto vysvetlenie.

Najprv sa pozrieme na laná, ktorými je systém kladiek pospájaný. Vo väčšine príkladov (a dosť dobre to funguje aj v praxi) sa predpokladá, že laná v kladkostroji skoro nič nevážia. To má jeden veľmi zaujímavý dôsledok. Predstavme si, že na lano pôsobí nejaká sila F (alebo viac síl, vtedy nás zaujíma ich výslednica). Podľa 2. Newtonovho zákona (zákon sily) by malo začať zrýchľovať v smere sily so zrýchlením $\dfrac{F}{m}$, kde m je hmotnosť lana. Silu teda delíme hmotnosťou. Vždy keď delíme nejaké rozumne veľké (teda nie zanedbateľne malé) číslo nejakým číslom veľmi blízkym nule, dostaneme obrovské číslo, teda ak na lano pôsobí nejaká sila, musí mať obrovské zrýchlenie. To by ale znamenalo, že za chvíľu by lano malo obrovskú rýchlosť, čo sa ale zrejme nedeje. Preto výslednica síl, ktoré pôsobia na lano musí byť celý čas tiež veľmi malá, môžeme povedať že nulová (poznámka pre detailistov: môže byť aj veľká, ale len na veľmi krátky čas, čo však nie je náš prípad). Takáto úvaha platí samozrejme len pre takmer nehmotné laná, ale aj v reálnych kladkostrojoch celkom dobre platí, že výslednica síl pôsobiacich na lano je nulová, keďže laná v kladkostroji majú väčšinu času takmer nulové zrýchlenie (buď sa nehýbu, alebo idú konštantnou rýchlosťou).

Lano si môžeme predstaviť aj ako veľmi veľa veľmi krátkych pospájaných kúskov. Keďže každý z týchto kúskov je vlastne sám o sebe lano, sily pôsobiace na každý kúsok musia mať nulovú výslednicu. Predstavme si, že budeme ťahať silou na jeden koniec lana (kúsok lana, za ktorý ťaháme, označme pracovne A). Kúsku lana B hneď vedľa kúska A sa nepáči, že A by chcel zrýchľovať smerom, ktorým ho ťaháme, preto naňho bude pôsobiť väzbovými silami, ktoré budú mať rovnakú veľkosť ako sila, ktorou pôsobíme, ale opačný smer (a teda výslednica síl pôsobiacich na kúsok A je naozaj nulová). Tu sa nám aplikuje 3. Newtnov zákon (zákon akcie a reakcie), takže ak B ťahá kúsok A opačným smerom ako my, A bude ťahať B rovnakou silou a rovnakým smerom ako my. Teraz je ale kúsok B v rovnakej situácii, ako bol kúsok A, teda analogicky musí naša úvaha platiť pre kúsok B a kúsok C, ktorý je hneď za ním. Úvahu môžeme opakovať ľubovoľne veľa krát, čiže medzi každou dvojicou susedných kúskov lana pôsobí dvojica síl opačného smeru, ktoré majú veľkosť ako tá počiatočná sila. Takéto vnútorné sily niekedy označujeme pojmom napäťová sila.

Obr. 1: Sily v lane

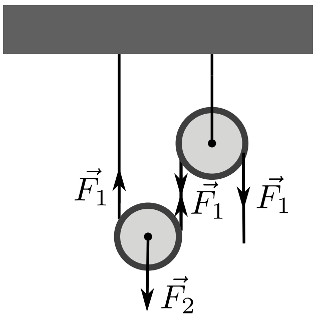
Zaujímavá situácia vzniká „v zatáčkach“, teda v miestach, kde sa lano dotýka kladky, keďže tam sily, ktorými na kúsok lana pôsobia jeho susedia, nemajú kvôli zakriveniu lana úplne opačné smery. Teda aby sa sily pôsobiace na tento kúsok poskladali do nulovej výslednice, musí naň pôsobiť drobnou silou aj kladka. Keďže je sila od kladky kolmá na dotyčnicu ku kladke (teda má smer od stredu kladky), symetria sa nenaruší a teda sily, ktorými na kúsok lana pôsobia jeho susedia, musia mať stále rovnakú veľkosť.



Obr. 2: Sily v lane

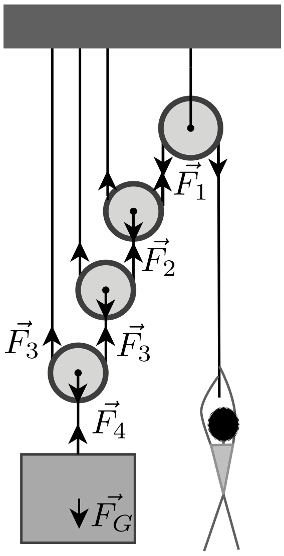
Výsledok toho je, že sila, ktorou pôsobíme, sa prenáša pozdĺž celého lana, takže sila rovnakej veľkosti bude pôsobiť aj na druhom konci lana. Môžeme si to predstaviť aj tak, že ak by sme lano v ľubovoľnom mieste prerezali a dali tam trpaslíka, ktorému by sme dali do rúk vzniknuté konce, musel by oba konce ťahať rovnakou silou, ako ťaháme lano my.

Teraz sa pozrieme na samotný kladkostroj. Ak je už závažie nad zemou, znamená to, že Edo už svoju úlohu splnil a je to konečný stav tejto sústavy. Všetko je stabilné, kladky sa nehýbu, takže výslednica všetkých síl je nulová. Dobre je si to ukázať na nasledujúcom obrázku.



Obr. 3: Prvé dve kladky

Edo pôsobí silou F_1 na lano. Vďaka prvej kladke a lanu bude pôsobiť sila F_1 aj na jeden koniec lana, ktoré sa obtáča okolo druhej kladky. Rovnaká sila pôsobí aj na opačnom konci lana, čiže druhá kladka by mala byť zdvíhaná silou $2F_1$. Avšak ako vieme, kladka sa nehýbe, takže tieto sily musia byť kompenzované silou F_2 rovnakej veľkosti, ale opačného smeru. Takže $F_2 = 2F_1$.



Obr. 4: Celý kladkostroj

Túto znalosť teraz aplikujeme na celý kladkostroj a analogicky dostaneme

$$F_3 = 2F_2 = 4F_1$$

$$F_4 = 2F_3 = 8F_1$$

Zo zadania vieme, že Edo vie vyvinúť maximálnu silu $F_1 = 700\,\mathrm{N}$, čiže závažie môže byť zdvíhané silou $F_4 = 5600\,\mathrm{N}$, ktorou je kompenzovaná gravitačná sila závažia. Preto pre maximálnu hmotnosť závažia dostávame

$$m = \frac{F_4}{g} = \frac{8F_1}{g} = 560\,\mathrm{kg}.$$

3.4 Štetiny (opravoval Jerguš)

Syseľ sa rozhodol vymaľovať si izbu svojím plznucim štetcom. Ked domaľoval, všimol si, že všetky štetiny mu zo štetca vypadali a zachytli sa vo farbe. A teraz by ho zaujímalo, koľko tých štetín sa mu po stenách pozachytávalo. Zoberte si teda veľký štetec alebo metlu. Navrhnite, akým spôsobom sa dajú porátať štetiny a porátajte ich tým spôsobom!

Spôsobov, ako porátať množstvo štetín na metle alebo štetci, je mnoho, od použitia difrakcie svetla až po ručné počítanie jednej štetiny za druhou. Na riešenie však zvolíme len jednu metódu, ktorá je ľahká a neunudíme sa pri nej k smrti.

Väčšina metiel má štetinky rozdelené na viacero menších úsekov, stačí nám teda spočítať, koľko štetiniek má jeden úsek, a to číslo vynásobiť počtom úsekov na metle.

Avšak jedno meranie nám nestačí. Čo ak by nemala metla v každom úseku rovnako veľa štetín? Urobíme teda meraní čo najviac, aby nám klesla nepresnosť. V našom prípade zmeriame 5 úsekov a tie spriemerujeme.

Úsek	Počet štetín
1.	135
2.	133
3.	136
4.	135
5.	132
priemer	134.2

Následne priemer vynásobíme počtom úsekov (v mojom prípade 64) a zistíme že naša metla má 8588 štetín.

Výsledková listina po 3. kole letnej časti 2012/2013

	Meno	Škola	1	2	3	4	♡	Σ_3	Σ
1	Michaela Dlugošová	ZŠ Francisciho	9	9	7	6	1.24	32.24	66.78
2	Matej Krásny	ŠpMNDaG	9	8	7	6	2.7	32.7	66.62
3	Viktória Jančárová	ZŠ Mierová	9	9	9	8	0	35	66
4	Martin Petrovič	ZŠ NbM	9	7	7	9	1.02	33.02	65.26
5	Patrik Grman	CZŠ Piešťany	9	8	5	6	1.79	29.79	65.07
6	Martina Zánová	ZŠ Baj	9	8	7	9	0	33	65
7	Marcel Palaj	ZŠ Hr	7	8	7	5	3.65	30.65	63.35
8	Matej Pončák	CZŠ G	9	7	7	4	0	27	62
9	Monika Valiková	EvGymJAK	9	8	7		2.3	26.3	60.09
10	Kristína Horňáková	ZŠ Močenok	9	7	2	6	0	24	59
11	Juraj Vasek	ZŠ M.Kukuč	7	8	7	5	1.94	28.94	57.74
12	Filip Rácz	G AV	9	6	4		2.58	21.58	54.33
13	Miroslav Papcun	ZŠ Vajanského	7	6	5	5	0	23	51
14	Petra Štefaníková	GyOHavl	9	8	7		0	24	49
15	Paulína Smolárová	ZŠ Lokca	9	5	1	5	2.56	22.56	47.02
16	Barbora Bánská	ZŠ Vrútocká	9	6	5	5	2.2	27.2	46.78
17	Nikoletta Bucsanszká	ZŠ Francisciho	5	8			2.39	15.39	45.05
18	Barbora Triščová	ZŠ s MŠ Jarovnice					0	0	44
18	Samuel Polednák	ZŠsvCaM					0	0	44
20	Andrea Andrésová	ZŠ Vrútocká	9	7	5	5	2.08	28.08	43.47
21	Marek Hlavatý	GJGT	9		4		0	13	41
22	Samo Krajči	G Alejová	7	9	7		4.49	27.49	37.99
23	Simona Saparová	ZŠ Bud	9	3	3	5	0	20	37
24	Edina Perašinová	GAB	9	3	5	2	2.58	21.58	35.68
25	Radoslav Žilka	ZŠ Div	7	8			4.73	19.73	33.63
26	Simona Rečičárová	ZŠ Francisciho	5	7			2.3	14.3	30.76
27	Timotej Židuljak	ZŠsMŠ TnV					0	0	30
28	Lívia Cigániková	ZŠ Dolná Tižina	8	8	5	5	3.9	29.9	29.9
29	Miroslava Baranová	ZŠsMŠ ST					0	0	29
30	Rudolf Šipčiak	ZŠ Dolná Tižina					0	0	26.3
31	Pavol Mucha	ZŠ Dolná Tižina					0	0	25.39
32	Simona Staňová	ZŠ Dolná Tižina	7	8	5		4.8	24.8	24.8
33	Veronika Gintnerová	ZŠ Námestie Mladosti					0	0	23
34	Kristína Hostačná	ZŠ B.n.B.					0	0	22.83
35	Jaromír Štefánik	ZŠ Vajanského					0	0	21
36	Adrián Kyčerka	ZŠ Trib					0	0	19.58
37	Kristína Gašperová	ZŠ AS		7	1	1	0	9	19
38	Jakub Čatloš	ŠpMNDaG					0	0	18.38
39	Martin Stankovič	ZŠ EMŠ					0	0	17.14
40	Zuzana Holeková	ZŠ AS					0	0	12
41	Imro Karniš	ZŠ AS					0	0	10.94
42	Jozef Lenhart	ZŠ Div					0	0	8.62
43	Martin Majtán	ZŠ Holubyho	6				0	6	6
44	Matej Benčík	ŠpMNDaG					0	0	5.92
45	Andrej Šandal	ŠpMNDaG					0	0	1.28
45	Kristína Šimková	ŠpMNDaG					0	0	1.28
45	Martin Piliav	ŠpMNDaG					0	0	1.28
45	Martin Kollár	ŠpMNDaG					0	0	1.28
45	Michael Gejdoš	ŠpMNDaG					0	0	1.28
45	Richard Burgár	ŠpMNDaG					0	0	1.28
45	Romana Antalová	ZŠ B.n.B.					0	0	1.28
45	Sarah Ivaničová	ŠpMNDaG					0	0	1.28
53	Katarína Kmeťová	FMFI UK					0	0	-42