Fyzikálny korešpondenčný seminár
7. ročník, 2013/2014
UFO, KTFDF FMFI UK, Mlynská dolina, 84248 Bratislava
e-mail: otazky@fks.sk web: http://ufo.fks.sk

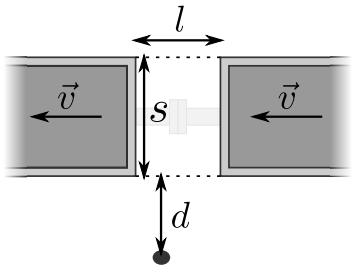
Zadania 2. kola letnej časti 2013/2014

Termín: 28. 4. 2014

2.1 Čistý prelet (9 bodov)

Indiánom stavba železníc cez ich rodnú préria spôsobila veľké škody. No čo mohli robiť? Stavbu sa im zastaviť nepodarilo. Strieľanie šípov po vagónoch tiež nemalo veľký efekt. Tak sa zmierili s osudom a vymysleli si novú zábavku. Jej cieľom bolo prestreliť šíp pomedzi dva vagóny idúceho vlaku tak, aby sa ani jedného vagónu nedotkol.

Strelec je vzdialený $d = 50\,\mathrm{m}$ od koľajníc a mieri kolmo na ne. Môže vystreliť, kedy to uzná za vhodné (nie len v zobrazenej chvíli). Medzera medzi vagónmi, cez ktorú má prestreliť, je dlhá $l = 0{,}5\,\mathrm{m}$ a vlak sa pohybuje rýchlosťou $v = 20\,\mathrm{m/s}$. Vagón má šírku $s = 1\,\mathrm{m}$.



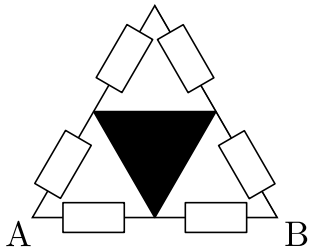
Obr. 1: Medzera medzi vagónmi

Aké sú všetky hodnoty rýchlostí c, ktorými môže indián strieľať, aby jeho šíp preletel medzerou bez dotknutia sa vagónov?

Predpokladajte, že šíp letí stále priamočiaro práve tou rýchlosťou, ktorou ho indián vystrelil.

2.2 Trojuholník (9 bodov)

Aký je odpor tohto zapojenia medzi bodmi A a B?



Obr. 2: Odporové zapojenie

Seminár podporujú:

Každý odpor má veľkosť R, čierny trojuholník na obrázku je dokonale vodivý.

Pri riešení tohto príkladu nezabúdajte na náš študijný text o odporoch[1]!

2.3 Koktejl (9 bodov)

Soľ pri tom, ako sa rozpúšťa, uvoľňuje teplo. A nás by zaujímalo, koľko tepla sa uvoľní pri jej rozpúšťaní na jeden gram kuchynskej soli. Túto veličinu budeme nazývať rozpustné teplo kuchynskej soli.

Merať odporúčame nasledovne: zoberte si dve nádoby, pričom jednu viete vložiť do druhej a vyplňte medzeru medzi nimi ľadom. Potom do vnútornej nádoby dajte presné množstvo ľadu a soli, zmiešajte, aby sa všetka soľ rozpustila a nechajte uzavreté ustáliť. Zo zloženia výslednej ustálenej zmesi dorátajte, koľko energie sa uvoľnilo pri rozpúštaní soli.

a) Prečo v postupe treba vyplniť medzeru medzi nádobami ľadom? (1 bod)

b) Prečo je potrebné uzatvoriť vnútornú nádobu počas ustaľovania? (1 bod)

c) Aké množstvo látok ste vložili dovnútra? (1 bod)

d) Aké bolo zloženie výslednej zmesi? (2 body)

e) Teraz vypočítajte rozpustné teplo soli. Vysvetlite, prečo ho rátate tak, ako ho rátate. (4 body)

Ak aj nebudete experiment robiť, skúste odpovedať na otázky a), b) a odvodiť vzťah na výpočet v časti e).

2.4 Tkáčka sa s tým nepára (9 bodov)

Mladej tkáčke Katke došla niť. Tak zobrala staré tričko, že si nejakú napára. Párala a párala, ale z trička takmer neubúdalo. Viete odhadnúť, koľko metrov nite je v bežnom (napríklad vašom) tričku?

Netipujte! Skúste váš odhad podložiť výpočtom. Uveďte aj veľkosť meraného trička.

2.5 Excellujeme! (9 bodov)

- (4 body) Nakreslite v tabuľkovom kalkulátore graf funkcie $y = \sqrt{x}$ od $x = 0$ po $x = 10$.
- (5 bodov) Použitím tabuľkového kalkulátoru vypočítajte nasledovný súčet:

$$1^\pi + 2^\pi + 3^\pi + \cdots + 1000^\pi$$

2.6 Spracovanie experimentálnych dát (9 bodov)

V minulej experimentálke ste mali zistiť, či závislosť pre dostrek vody

$$d = C\sqrt{h}$$

platí, alebo neplatí. Paťo to chcel vedieť tiež, a tak sa pustil do merania. Nameral tieto hodnoty:[2]

[1] Nájdete ho na `http://ufo.fks.sk/archiv/2013_14/7knizkaLeto1.pdf`

[2] Hodnoty nájdete vo formáte .xls na stránke: `http://fks.sk/~andrej/serial/`

h/ cm	d/ cm			
16	16,7	17,1	16,3	16,8
14	15,8	15,9	15,2	16,1
12	14,5	13,8	13,3	14,1
10	12,4	12,6	12,8	12,5
8	11,4	10,5	11,8	10,7
6	9,5	8,7	9,6	9,9
4	7,9	8,2	8,3	8,6

a.) Pre každú výšku h vypočítajte priemernú vzdialenosť $\langle d \rangle$ a jej štandardnú odchýlku.

b.) Z rovnice $d = C\sqrt{h}$ vyjadrite C a pomocou pravidiel zo seriálu napíšte vzorec, podľa ktorého vypočítame nepresnosť C.

Pomôcka: nepresnosť pre x^2 vypočítame z pravidla o súčine: pretože $x^2 = x \cdot x$, tak relatívna chyba x^2 bude dvakrát väčšia ako relatívna chyba x.

c.) Pre každé meranie výšky vypočítajte príslušnú hodnotu C a jeho nepresnosť. Obe čísla zaokrúhlite na 2 desatinné miesta.

d.) Nájdite také C, ktoré bude v rámci chyby vyhovovať všetkým meraniam.

Seriál: O experimentovaní

Milí riešitelia,

v tomto dieli seriálu sa budeme venovať téme, ktorá je (skoro) každému správnemu fyzikovi nesmierne blízka: experimenty a ich spracovanie. Mať slušný teoretický základ je vždy fajn; ale ak nejakú teóriu nevieme overiť v praxi, je táto teória zbytočná. V tomto dieli si teda ukážeme, ako postupovať, ak dostaneme za úlohu niečo namerať.

Krok prvý: riadne si to premyslieť

Počas experimentovania nie je nič ľahšie, ako na niečo zabudnúť. Preto si každú experimentálku najskôr dostatočne *premyslite*. Ešte *pred* začatím samotného merania si teda sadnite a rozmýšľajte:

Aká fyzika stojí za mojím experimentom? Najčastejšie sa stretávame s dejmi z mechaniky, hydromechaniky (napr. Archimedov zákon), vo vyšších ročníkoch aj z elektriny, magnetizmu alebo optiky. Ak máme za úlohu zmerať, akú priemernú rýchlosť bude mať guličkа, ktorú sme rozbehli „z kopčeka“, tak všetci vieme, že správny vzorec pre rýchlosť je

$$v = \frac{s}{t}\,,$$

Vyzerá to tak, akoby sme mali merať iba dráhu s a čas t. My ale pokračujeme ďalej – na guličku pôsobí predsa odporová sila vzduchu a trenie s podložkou. Ak otvoríme tabuľky, dočítame sa tam, že táto odporová sila závisí napríklad na veľkosti guličky alebo na jej hmotnosti. Je teda pravdepodobné, že ak by sme experiment s guličkou zopakovali, no

použili by sme 10-krát väčšiu guličku z polystyrénu, výsledky by boli pravdepodobne rôzne. Bude teda určite dobré poznačiť si aj veľkosť a hmotnosť guličky.

Aparatúra

Týmto čudným slovom fyzici volajú svoje experimentálne zariadenia. V UFe sa budeme stretávať len s jednoduchými aparatúrami, ktoré určite zoženiete doma. Aparatúru si nachystajte dopredu a usitite sa, že máte všetko. Lebo potom to príde:

- zistíte, že to pravítko je príliš krátke,
- beháte po byte a hľadáte teplomer,
- beháte za psom, ktorý vám ukradol skákalku,
- stojíte v kuchyni a rozmýšľate, kde máte uložený cukor.

Koľko toho treba namerať?

S pojmom *opakovanie merania* sa stretávame naozaj často. Áno, opakovanie je matka múdrosti, ale aj tu treba postupovať s rozumom.

Opakovať nejaké meranie je naozaj dôležitá vec. Pri väčšine experimentov platí, že fyzikálnu informáciu nám odovzávajú až vtedy, keď ich meriame veľakrát a získané výsledky spriemerujeme.

Úžasným príkladom v opakovaní merania je najväčšia fyzikálna inštitúcia CERN v Ženeve, kde pomocou obrách urýchľovačov častíc skúmajú procesy v mierke ešte menšej, ako je atómové jadro. V CERNe totiž priemerné meranie znamená namerať tú istú vec aspoň miliardukrát.

No ale vráťme sa do nášho sveta: pri meraní experimentu v UFe postačí zopakovať meranie aspoň 3-krát, najlepšie ale 5 až 10-krát. Opakovať meranie ale nemá zmysel, ak by sme mali dokola merať tie isté hodnoty. Zmerať dĺžku stola stačí len raz, pretože je takmer isté, že znova by ste namerali znova tú istú dĺžku. Na druhej strane, ak budeme marať čas pádu guličky t, tak meranie opakovať musíme – tým, že každý človek má istú reakčnú dobu na spustenie stopiek, zistíme, že medzi jednotlivými meraniami času dostávame skutočne merateľné rozdiely.

Spracovanie nameraných hodnôt

Po (opakovanom) meraní chceme vedieť čo sme zmerali a ako presne sme to zmerali. Tu pomôže jednoduchý súbor pravidiel, ktoré je naozaj dobré si zapamätať.

Priemer Ukazuje sa, že *napravdepodobnejšia* hodnota z n opakovaných meraní veličiny x je klasický aritmetický priemer. Označujeme ho buď $\bar{x}$ alebo $\langle x \rangle$ a platí to, čo všetci poznáme:

$$\bar{x} = \langle x \rangle = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\,,$$

Chyba opakovaného merania Pri výpočte chyby máme viacero možností. Najjednoduchšiu možnosť ste sa určite učili v škole: vypočítame odchýlky jednotlivých meraní od

priemernej hodnoty (v absolútnej hodnote) a tieto odchýlky spriemerujeme. Matematicky zapísané (chybu označme Δx)

$$\Delta x = \frac{|x_1 - \langle x \rangle| + |x_2 - \langle x \rangle| + \ldots |x_n - \langle x \rangle|}{n},$$

Ak budeme počítať chyby takto, je to jednoduché a rýchle a v UFe postačujúce. Táto chyba má ale jednu nevýhodu – prakticky sa s rastúcim počtom opakovaní merania nemení. My chceme ale presný opak: chceme chybu, ktorá bude pre viac meraní menšia, pretože opakovaním by sme mali dostať „presnejší“ výsledok. Chyba, ktorá má túto vlastnosť, sa nazýva *štandardná odchýlka*:

1. Pre každú nameranú veličinu vypočítame rozdiel od priemernej hodnoty a umočníme ho na druhú: $(x_i - \langle x \rangle)^2$;
2. Všetky tieto čísla sčítame $(x_1 - \langle x \rangle)^2 + \cdots + (x_n - \langle x \rangle)^2$;
3. Vydelíme výrazom $n(n-1)$;
4. A nakoniec to celé odmocníme. Toto číslo je štandardná odchýlka, označujeme ju gréckym písmenom sigma:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{(x_1 - \langle x \rangle)^2 + \cdots + (x_n - \langle x \rangle)^2}{n(n-1)}},$$

Priemer aj štandardnú odchýlku by ste mali nájsť už ako nachystanú funkciu v každej lepšej kalkulačke, no rovnako aj v počítači, v programoch Microsoft Excel® alebo v OpenOffice Calc. Príkaz (funkcia), ktorá počíta priemer, sa volá AVERAGE, funkcia na počítanie štandardnej odchýlky je STDEV.

Počítanie s chybami Vo fyzike skoro nikdy nemeriame len jenu veličinu. Predstavme si, že meriame hustotu ϱ. Najskôr zmeriame hmotnosť m s chybou σ_m a potom objem V s chybou σ_V. Priemernú hustotu zmeriame jednoducho: vydelíme priemernú hmostosť m objemom V. Čo ale s chybou? Vydelíme? Vynásobíme? Vieme si jednoducho rozmyslieť, že takéto postupy by viedli k neprirodzene veľkým alebo malým chybám, a to zjavne nechceme. Preto sa pri počítaní s chybami riadime nasledujúcimi pravidlami:

- Chyba súčtu $c = a + b$, ale aj rozdielu $c = a - b$ je súčet chýb: $\sigma_c = \sigma_a + \sigma_b$;
- Chyba súčinu $c = ab$, ale aj podielu $c = a/b$ je súčet *relatívnych* chýb:
$$\frac{\sigma_c}{c} = \frac{\sigma_a}{a} + \frac{\sigma_b}{b};$$
- Chyba súčinu veličiny a s konštantou k: $c = ka$ je $\sigma_c = k\sigma_a$;

Často sa nám ale môže stať, že veličinu nezmeriame viackrát, alebo nevieme takto precízne vypočítať jej nepresnosť. Vtedy prichádza na scénu fyzikálny odhad a chybu sa pokúsime aspoň rozumne odhadnúť. Odhad chyby je určite správnejší ako prehlásenie, že sme merali úplne presne.

Výhody tabuľkových kalkulátorov

Kto v tejto dobe počíta chyby ručne na papieri, že? Prácu za nás s obľubou vykonávajú počítače. Na spracovanie údajov z experimentu sa najlepšie hodia tabuľkové kalkulátory, napríklad Microsoft Excel alebo OpenOffice Calc. Práca s nimi je veľmi jednoduchá. Stačí si zapamätať pravidlo, že ak nám má kalkulátor previesť v nejakej bunke (políčku) matematickú operáciu, musíme v danej bunke začať túto operáciu začať prísať až po znaku =. Takže, napríklad príkaz

= (A1 + B3 * 4) / B4

sčíta hodnotu na políčku A1 so štvornásobkom hodnoty políčka B3 a celé to vydelí hodnotou políčka B4.

Okrem jednoduchých matematických operácií majú kalkulátory zabudované aj špeciálne funkcie, ako napríklad odmodcnina = SQRT (A8) alebo súčet vyznačených čísel:

= SUM (C2 : C8)

Táto funkcia sčíta všetky čísla, ktoré sú na políčkach C2 až C8. Ak sa chcete s Excelom naučiť pracovať lepšie, prečítajte si kapitolu 7 textu[3] o práci s editorom OpenOffice Calc,[4] ktorý nájdete na adrese: http://www.smnd.sk/anino/moje/Office.pdf.

Kreslenie grafov

Často posledný krok experimentovania je z nameraných a spracovaných veličín zostrojiť graf. To znova zvládajú z veľkej časti programy automaticky, no je dobré vedieť, čo všetko musí správny graf obsahovať.

V prvom rade sú to rozumne zvolené mierky na osiach, spolu s jednotkami. Napríklad, ak meriame vzdialenosť, a najvyššia nameraná hodnota bola 0,84 m, tak tieto hodnoty vynášame na os, ktorá bude mať dieliky od nuly po 0,9 m (prípadne po 1 m). K osi naviac napíšeme, v akých je jednotkách (metre) a akú veličinu popisuje (napríklad s).

Nezabúdajme, že na x-ovú os vynášame veličinu, ktorú pri meraní meníme, a na y-ovú os veličinu, ktorú následne meriame. Teda ak meriame závislosť teploty od tlaku, tak tlak budeme vynášať na os x a teplotu na os y.

Ak máme ujasnené, správne pomenované a očíslované osi, môžeme vyniesť body do grafu. Odporúčame ich potom ešte preložiť aspoň približne *hladkou* čiarou, aby sme zvýraznili, akú závislosť sme to vlastne namerali.

[3] Text slúži ako študijný materiál žiakov Školy pre mimoriadne nadané deti a gymnázium, autorovi textu Mgr. Antonovi Belanovi ďakujeme za jeho poskytnutie.

[4] Odporúčame ju ale aj používateľom Excelu, pretože všetky príkazy sú v podstate rovnaké.

Vzorové riešenia 1. kola letnej časti 2013/2014

1.1 Klzisko (opravovala Baška)

Mongoli Edo, Tina a Zuzka sa rozhodli urobiť na širokej stepnej pláni klzisko a učiť ich stádo korčuľovať sa. V príručke mladého pastiera zistili, že potrebujú na plochu 10 metrov krát 10 metrov doniesť toľko vody, aby tam vytvorila mláku vysokú 1 centimeter. Každý z nich si teda zobral kanvu s objemom 10 litrov a prišiel ku budúcemu klzisku, ktoré je od prameňa vzdialené 30 metrov. Edo beží rýchlosťou $3\,\mathrm{m/s}$, Tina rýchlosťou $2\,\mathrm{m/s}$ a Zuzka rýchlosťou $1\,\mathrm{m/s}$. Môžete predpokladať, že naplnenie kanvy vodou netrvá nič. Ako dlho bude Mongolom trvať nanosenie vody na klzisko, ak začnú všetci naraz utekať od klziska ku prameňu a neskončia, kým voda nie je nanosená?

Na začiatok riešenia by nám pomohlo, ak by sme si zo zadaných rozmerov klziska zistili, koľko to tej vody vlastne potrebujeme. Klzisko má rozmery $10\,\mathrm{m} \times 10\,\mathrm{m} \times 1\,\mathrm{cm}$ a keďže má toto klzisko tvar kvádra, na zistenie objemu len jednotlivé rozmery vynásobíme. Ale nesmieme pri tom zabudnúť na premenu jednotiek! $1\,\mathrm{m}$ je $100\,\mathrm{cm}$, čiže $1\,\mathrm{cm} = 0,01\,\mathrm{m}$. Preto je objem klziska

$$V = 10\,\mathrm{m} \cdot 10\,\mathrm{m} \cdot 0,01\,\mathrm{m} = 1\,\mathrm{m}^3\,,$$

Tento objem je pre nás výhodnejšie premeniť na litre, keďže tak máme zadané aj objemy kanví. Preto premeníme

$$V = 1\,\mathrm{m}^3 = 1\,000\,\mathrm{dm}^3 = 1\,000\,\ell\,,$$

V prepočte na kanvice: $1\,000\,\ell/10\,\ell = 100$ kanvíc.

Z rýchlostí, akou Mongoli bežia, môžeme vypočítať, ako dlho im bude trvať doniesť jednu kanvu. Na to použijeme známy vzorec $t = s/v$ (čas je rovný prejdenej dráhe lomeno rýchlosť). Netreba zabúdať, že dráha s má až $60\,\mathrm{m}$ a nie $30\,\mathrm{m}$, lebo Mongoli musia nielen prísť k jazeru, ale aj sa vrátiť. Edovi to bude teda trvať $t = 60\,\mathrm{m}/3\,\mathrm{m/s} = 20\,\mathrm{s}$, Tine $t = 60\,\mathrm{m}/2\,\mathrm{m/s} = 30\,\mathrm{s}$, Zuzke $t = 60\,\mathrm{m}/1\,\mathrm{m/s} = 60\,\mathrm{s}$.

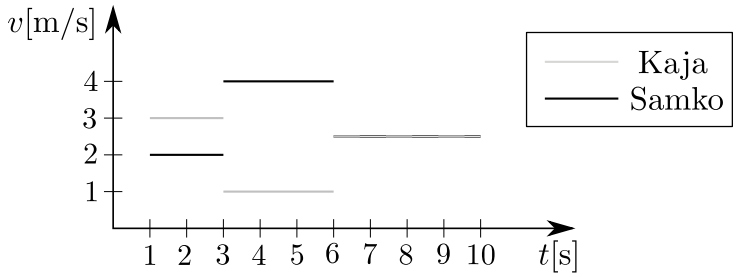
Teraz môžeme zvoliť viacero spôsobov, ako počítať ďalej. Môžeme napríklad rátať postupne vedrá za jednotlivé časy. Toto je ale pomerne nepraktické a pomalé, keďže musíme vedier zarátať až 100. Skúsme nejakú fintu. Jedna zaujímavá, ktorá sa dala použiť, bola rátať konvy po $60\,\mathrm{s}$. Prečo práve 60? Pretože je to najmenší spoločný násobok 20, 30 a 60 (tj. časy jednotlivých Mongolov v sekundách, za ktoré im trvá priniesť jednu kanvicu). Teda po každých $60\,\mathrm{s}$ nám pribudne rovnaký počet kanvíc vody!

Tento počet bude 6 – Edo sa stihne otočiť 3-krát, Tina 2-krát a napokon Zuzka raz. Ak vydelíme 100 vedier počtom 6 vedier za minútu, dostaneme, že im to bude trvať aspoň 16 minút. K tomu im budú chýbať ešte 4 vedrá vody. Tie ale môžeme ľahko dopočítať „ručne“ – po $20\,\mathrm{s}$ pribudne prvé, po $30\,\mathrm{s}$ druhé, po $40\,\mathrm{s}$ tretie a napokon po $60\,\mathrm{s}$ prinesú vodu všetci naraz. Bude im to teda trvať 17 minút.

Hodnotenie Za úplne správne riešenie je samozrejme 9 bodov, za neuvažovanie nad tým, že voda neprúdi priebežne, ale je nosená nárazovo po vedrách som zvyčajne strhávala 3 body, za nedokončené riešenia alebo iné chyby som strhávala body individuálne, podľa toho, aké vážne boli.

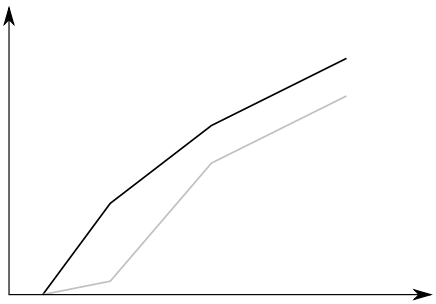
1.2 Beh za palacinkou (opravoval Maťo G.)

Kaja a Samko išli robiť palacinky. Kuchynka na intráku je ale veľmi ďaleko. V kuchynke urobili cesto, rozohriali olej na panvici, vyliali cesto na prvú palacinku a išli po džem do izby. Keď už mali džem, zistili, že im už asi tá palacinka prihára a rozutekali sa za ňou. Kuchynka je od izby vzdialená $l = 100\,\mathrm{m}$. Tu vidíte závislosť ich rýchlostí od času (Kajka aj Samko ešte chvíľu pobehovali aj v kuchynke):

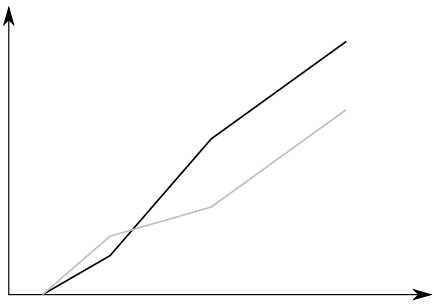


Obr. 3: Graf závislosti rýchlostí od času

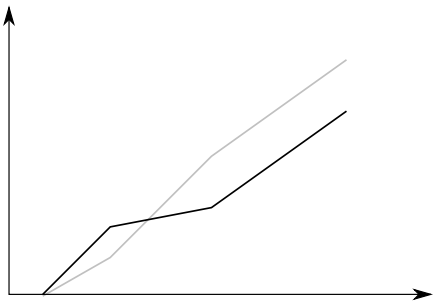
- Kto bol k palacinkám bližšie v 6. sekunde? O koľko?
- Kto bol pri palacinkách skôr?
- Ktorý z grafov zobrazuje závislosť dráhy Kajky a Samka od času?



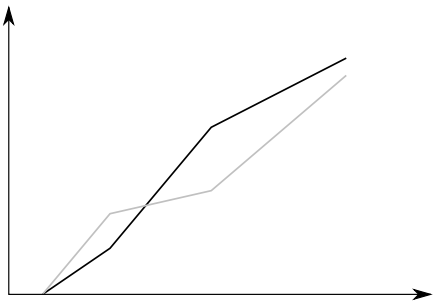
Obr. 4: Graf 1



Obr. 5: Graf 2



Obr. 6: Graf 3



Obr. 7: Graf 4

Nie je potrebné, aby ste porátali, ako presne má ten graf vyzerať a porovnali ho s grafmi zo zadania. Nemusíte už nič počítať, aby ste vysvetlili, prečo daný graf nemôže byť dobrý.

Vzdialenosť, ktorú Kaja prešla, vypočítame podľa známeho vzťahu

$$s = vt\,,$$

Graf si však najprv rozdelíme na viacero úsekov: prvý bude medzi časmi 1 s a 3 s, druhý bude medzi časmi 3 s a 6 s a tretí bude medzi časmi 6 s a 10 s. Rýchlosť Kaji budeme v i-tom úseku označovať ako v_i, Samkovu rýchlosť zasa u_i. To znamená, že napríklad pre 2. úsek bude rýchlosť Kaji v_2. Dráhu prejdenú Kajou na konci i-teho úseku označme ešte ako s_i a dráhu prejdenú Samkom l_i. Čas, ktorý trvali jednotlivé úseky budeme označovať ako t_i.

Pripravení na boj označeniami už môžeme ísť počítať. Kaja prešla v jednotlivých intervaloch dráhy

$$\begin{aligned} s_1 &= v_1 t_1 = 3\,\mathrm{m/s} \cdot 2\,\mathrm{s} = 6\,\mathrm{m}\,,\\ s_2 &= v_2 t_2 = 1\,\mathrm{m/s} \cdot 3\,\mathrm{s} = 3\,\mathrm{m}\,,\\ s_3 &= v_3 t_3 = 2{,}5\,\mathrm{m/s} \cdot 4\,\mathrm{s} = 10\,\mathrm{m}\,, \end{aligned}$$

zatiaľ čo Samko prešiel za jednotlivé intervaly dráhy

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 t_1 = 2\,\mathrm{m/s} \cdot 2\,\mathrm{s} = 4\,\mathrm{m}\,,\\ l_2 &= u_2 t_2 = 4\,\mathrm{m/s} \cdot 2\,\mathrm{s} = 8\,\mathrm{m}\,,\\ l_3 &= u_3 t_3 = 2{,}5\,\mathrm{m/s} \cdot 4\,\mathrm{s} = 10\,\mathrm{m}\,, \end{aligned}$$

Keďže obaja štartovali na rovnakom mieste, k palacinkám bude v 6, sekunde bližšie ten, kto prešiel po štvrtú sekundu väčšiu vzdialenosť (od toho času bežia obaja rovnako rýchlo). Táto vzialenosť zodpovedá súčtu dráh prejdených v 1. a 2. úseku. Keďže platí

$$s_1 + s_2 = 9\,\mathrm{m} < l_1 + l_2 = 12\,\mathrm{m}\,,$$

Samko prešiel väčšiu dráhu, a teda aj bol pri palacinkách v 6. sekunde bližšie.

Teraz poďme zistiť, že kto bol pri palacinkách skôr. Počas celého grafu prešla Kajka dráhu $s_1 + s_2 + s_3 = 19\,\mathrm{m}$ a Samko prešiel dráhu $l_1 + l_2 + l_3 = 22\,\mathrm{m}$, čo znamená, že sa ani jeden z nich nestihol k palacinkám dostať. Viacerí ste predpokladali, že graf pokračuje ďalej, no v skutočnosti sa už nič o ďalšom priebehu rýchlosti v grafe nepíše.

Grafy

Jednoznačne vieme povedať, že na konci grafu by mal byť Samko ďalej než Kajka, lebo prešiel väčšiu dráhu. To nám vylučuje graf 3.

Ďalej si môžeme pomôcť tým, že budeme porovnávať *sklon* priamky v grafe závislosti dráhy x od času t. Čo však ten sklon presne znamená? Vieme ho vyjadriť ako $\Delta x/\Delta t$, tj. pomer, v akom sa mení dráha pri zmene času. Tento pomer je nám však povedomý: je to vlastne rýchlosť človeka v tom čase, kedy kedy tento pomer vypočítame![5] Takže tam, kde

[5] Reálne sa snažíme vyberať čo možno najmenší úsek Δt (čím je úsek menší, tým presnešie vieme „merať“ rýchlosť). Vyššia matematika umožňuje aj vyberanie nekonečne malého úseku, potom sa to volá *derivácia*. Ale o tom niekedy inokedy.

je sklon priamky väčší (priamka je strmšia) ako niekde inde, bude v tom mieste aj vyššia rýchlosť.

S novými vedomosťami sa môžeme vrhnúť na vec. Všimnime si, že v 3. úseku mali obaja rovnakú rýchlosť. To znamená, že aj sklon priamok bude rovnaký, čo nám vylučuje 4. možnosť, lebo tam majú priamky v 3. úseku rôzne sklony.

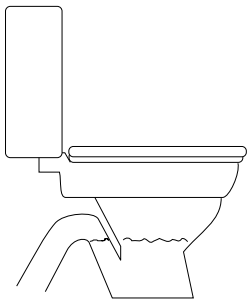
Nakoniec sa pozrieme na 1. úsek, kedy mal mať Samko menšiu rýchlosť ako Kajka, čiže aj Kajkina závislosť polohy od času (teda tá priamka) by mala mať menší sklon ako Samkova. To nám spĺňa zo zostávajúcich grafov iba graf 2, a teda musí byť hľadaným grafom.

Hodnotenie Za každú správne odpovedanú časť sa dali získať 3 body. Za menšie chyby sa strhávali 1-2 body, a to za každú časť, v ktorej bola chyba.

1.3 O záchode (opravoval Paťo)

Prečo je výška hladiny v záchode stále rovnaká, aj keď spláchnem?

Môžeme chodiť okolo horúcej kaše a tváriť sa veľmi odborne a pozerať sa na záchod zo všetkých strán. No je to zbytočné. Najlepšie sa rozmýšľa pri záchode rozrezanom na polovicu:



Obr. 8: Schéma záchodu

Vidíme, že potrubie, ktoré zo záchodu vychádza, nie je len tak hocijaké. Je zahnuté tak, aby odtekajúca voda musela tiecť v jednom mieste *vyššie* ako je hladina vody v záchode.

Ako je ale niečo také vôbec možné? Po spláchnutí sa do misy naženie veľké množstvo vody, ktoré spôsobí, že hladina vody v mise sa na chvíľku zdvihne. Vyššia hladina vody ale znamená vyšší tlak v *celej* kvapaline (to je Pascalov zákon). Preto sa musí zdvihnúť aj hladina v zahnutom potrubí. K rovnakému výsledku dospejeme aj vtedy, keď si uvedomíme, že voda v záchode sa nachádza v spojenej nádobe. Pre ňu platí, že hladina na oboch koncoch nádoby je v rovnakej výške. Zvýšenie hladiny na jednom konci nádoby sa teda automaticky pretaví na zvýšenie hladiny na druhom konci.

Ak sa ale poriadne pozrieme na obrázok, zvýšenie hladiny spôsobí, že voda začne pretekať do kanalizácie. Takto z misy odtečie toľko vody, až kým hladina v mise neklesne na pôvodnú úroveň – vtedy sa pretekanie preruší. Samozrejme, pri každom ďalšom spláchnutí sa celý proces zopakuje. No vo výsledku ostane výška hladiny v záchode vždy rovnaká.

Viacerí z vás ste správne podotkli, že tento tvar potrubia má aj iný (a veľmi praktický) význam: zabraňuje miešaniu smradľavého vzduchu z kanalizácie s čistým vzduchom na záchode.

Hodnotenie Na získanie veľa bodov bolo treba riešenie dostatočne „obkecať“. Bolo treba spomenúť, že potrubie je zahnuté tak, ako na obrázku 8 a tiež aspoň pripomenúť, že výška hladín je na oboch koncoch rovnaká. Body som strhával podľa individuálnych drobných nedostatkov, keďže drvivá väčšina úlohu vyriešila správne.

1.4 Deravé sudy (opravovala Bebe, vzorák Maťo G.)

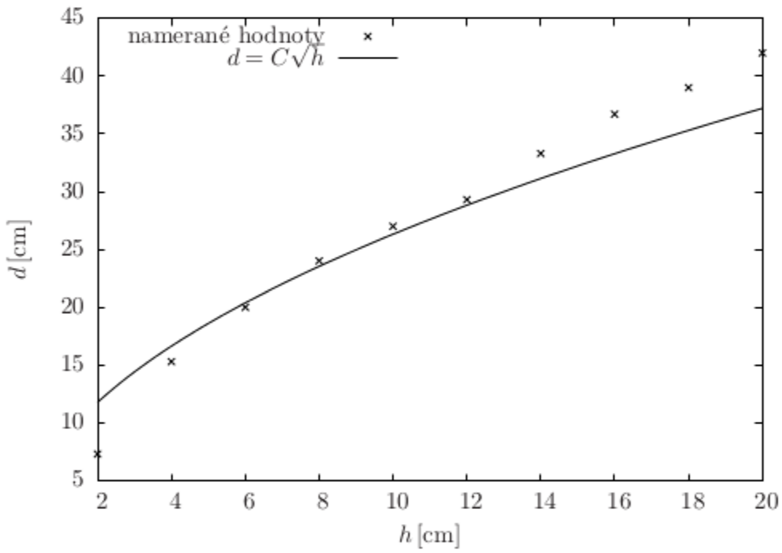
Kapitán pirátskej lode Paťo zhliadol na obzore obchodnú loď s francúzskou vlajkou. Tá bude viezť víno! To piráti radi! Zavelil teda na útok. Začali sa ozývať výstrely z dela, loď bola plne naložená, nemohla im ujsť. Na počudovanie pirátov na lodi v čase, keď sa k nej už natoľko priblížili, nik nebol. Aspoň sa nebudú musieť párať so zajatcami a hádzať ich žralokom. Keď však vnikli do podpalubia, zistili obrovskú galibu. Všetky sudy s vínom boli prederavené a víno striekalo na všetky strany, na podlahu, steny, kapitána... V ten okamih nešťastia bolo možné utešiť námornícku dušu jediným spôsobom: experimentovaním s dostrekom vína.

Zoberte si plastovú fľašu, ktorá je v nejakom dosť veľkom úseku považovateľná za valcovú. Vo valcovej časti urobte dierku, naplňte ju vodou a odmerajte závislosť dĺžky dostreku vody od výšky hladiny nad dierkou. Nádobu s vodou si kľudne podložte, aby bola vyššie a vám sa lepšie meralo. Dbajte stále na to, aby stála vodorovne a nezatvárajte nádobu.

- Zostavte meraciu aparatúru, a opíšte nám, ako vyzerá a ako meriate dostrek d. (1 bod)
- Predstavte si, že by po vás niekto chcel zopakovať vaše meranie a overiť si vaše výsledky. Napíšte nám hodnoty všetkých parametrov, ktoré by tento človek potreboval poznať. (2 body)
- Namerajte dostrek d aspoň pre desať rôznych výšok h a dáta zapíšte do tabuľky. (2 body)
- Správne nakreslite graf závislosti dostreku od výšky hladiny nad dierkou. (2 body)
- Kapitán Paťo sa dopočul, že táto závislosť bude $d = C \cdot \sqrt{h}$, kde C je nejaká konštanta. Ako by podľa vás mohol z vašich nameraných dát určiť, že je to pravda? (1 bod)
- Zrealizujte váš návrh a určte, či podľa vás daná závislosť môže byť $d = C \cdot \sqrt{h}$. (1 bod)

Aparatúra Na meranie sme použili meter, ktorý sme umiestnili vedľa papiera, aby sme mohli aj po vystreknutí vidieť, do akej vzdialenosti nám voda dostrekne. Papier má tú výhodu, že vodné fľaky sú na ňom dobre viditeľné a taktiež ho vieme pomerne ľahko meniť medzi experimentami. Niektorí ste tento problém riešili tým, že ste vodu fotili alebo ste to jednoducho odhadli okom, čo nemusí byť zrovna najpresnejšia metóda. Na zjednodušenie pozorovania môžeme vodu ofarbiť: napríklad látkou $KMnO_4$ (manganistan draselný), ktorý len málo zmení vlastnosti vody.

Fľašu sme položili na krabicu, pre ľahšie meranie. Do fľaše sme vyvŕtali **jednu** dierku, menili sme hladinu a merali vzdialenosť dostreku. Mnohí z vás vytvorili viacero dierok a hladinu ste udržiavali konštantnú, čo ale nie je rovnaký experiment, a to bol aj častý dôvod, prečo vám nevychádzalo meranie.



Obr. 9: Závislosť d od h

Parametre Medzi dôležité parametre experimentu určite patrí výška dierky nad meracou plochou H a taktiež aj výška hladiny nad dierkou h. Ďalší rozumný parameter je polomer diery vo fľaše a aj polomer fľaše samotnej.

Experiment je výhodnejšie robiť s malými dierkami (rozumej, oveľa menšími ako je polomer fľaše. Pri príliš veľkých dierkach netečie voda z fľaše rovnako, čo nám sťažuje meranie. Naviac vám prezradíme, že pre malú dierku bude vzdialenosť d závisieť len od H a h.

Meranie Za namerané hodnoty ďakujeme Matejovi Krásnemu, ktorý nameral túto tabuľku hodnôt:

meranie	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h [cm]	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
d [cm]	7.3	15.3	20.0	24.0	27.0	29.3	33.3	36.7	39.0	42.0

Z nameraných hodnôt vieme vykresliť graf v nejakom rafinovanom programe, ako napríklad Excel alebo OpenOffice Calc.[6] Na x-ovú os si nanesieme h a na y-ovú si nanesieme d. Nezabudneme dať na obe osi správny popisok aj s jednotkami a osi očíslovať. Namerané body nespájame lomenou čiarou. Jednoducho ich tam len necháme osamostatnene, alebo ich približne preložíme nejakou hladkou čiarou. Dobrým zvykom je dať do grafu mriežku, lebo pridáva na prehľadnosti grafu.

Sedí závislosť d od h s grafom? Najjednoduchšou metódou, ako zistiť, či závislosť $d = C\sqrt{h}$ je správna (a ktorú si vybral nejeden z vás), bolo dopočítať koeficient C pre pre každý nameraný bodík. Ak bude závislosť správna, koeficienty C budú všade približne rovnaké.[7]

[6] Alternatívou je aj vedecký program gnuplot.

[7] Je to kvôli tomu, že v prípade správnej závislosti len jedna hodnota čísla C nám musí opisovať všetky namerané dvojice (h, d). Z toho plynie, že pomer $d/\sqrt{h}$ by mal vyjsť rovnaký pre každý nameraný bod.

Čo ale je „približne rovnaké“ a čo už nie? Keď vám hodnota nejakej konštanty, o ktorej skoro nič netušíme, vyjde s nepresnosťou $\pm 1\,1/\sqrt{\mathrm{m}}$, viete s istotou povedať, že to sedí? Veru, s istotou to povedať nevieme.

Vylepšením tejto metódy môže byť to, že si vypočítané hodnoty C spriemerujeme a z priemernej hodnoty vytvoríme funkciu $y = C\sqrt{x}$, ktorú následne vykreslíme do grafu s nameranými hodnotami. Táto funkcia by mala pekne opisovať všetky hodnoty. Podľa toho, ako presne táto funkcia „sedí“, môžeme trochu objektívnejšie povedať, či je závislosť správna alebo nie.

Pre náe meranie vyšli hodnoty koeficientov C nasledovné:

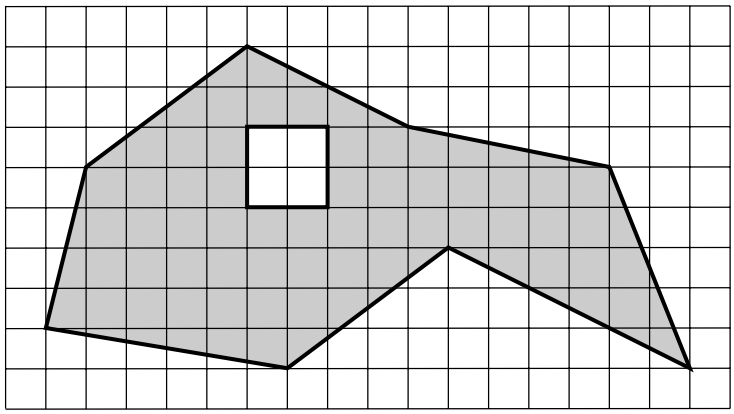
meranie	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	priemer
$C\,[1/\sqrt{\mathrm{m}}]$	5.18	7.65	8.16	8.48	8.54	8.47	8.90	9.18	9.20	9.40	8.32

Ako je vidieť pre hodnoty $h \geq 6$ je C pomerne konštantné, takže závislosť môžeme prehlásiť za správnu.

Nepresnosti V našom prípade mohol meranie znepresňovať odpor vzduchu, ktorý spomaľoval kvapky vody (s takouto silou sa vo hľadanej funkcii nepočíta) a následne ich aj rozdroboval na menšie kvapôčky. Ďalej meranie ovplyvnila „neideálnosť“ vody, tj. existencia viskozity, teda vnútorného trenia,[8], ktoré spomaľuje tok vody, čím dostávame menšie vzdialenosti. dostrelu[9] Pri meraní okom určite zaváži aj to, že oko nevie veľmi presne vnímať rýchlo hýbajúce sa kvapky.

1.5 Ružové kachličky (opravoval Jerguš)

Plameniak Andrej je hrozne samoľúby. A tak sa pri prestavbe kúpeľne rozhodol, že chce mať na kachličkách svoj portrét. Bytový dizajnér mu predložil takýto návrh:



Obr. 10: Plameniakova hlava

Andrej je zvedavý, či bude na tých kachličkách dostatočne vynikať. Aká je plocha jeho hlavy? Predpokladajte, že jeden štvorček má hranu dlhú 10 centimetrov.

[8] Viskozita spôsobuje napríklad aj to, že med je „hustý“ – teda sa pomaly prelieva.

[9] Toto sa najmä prejavovalo pri malých hodnotách h.

Andrej sa na začiatok zadumal a všimol si pár zaujmavích skutočností. Keď sa totiž pozrel na plameniaka, všimol si, že všetky krivé čiary sú vlastne iba uhlopriečky obdĺžnikov. Plocha týchto útvarov je predsa $ab/2$. Keď už vedel ako počítať plochy takých trojuholníkov, v obrázku ostali mu iba štvorce. O štvorcoch však Andrej vedel, že majú plochu ab!

Po tomto dumaní bolo Andrejovi jasné všetko, čo potreboval a so zápalom pre vec sa pustil do počítania plochy jeho úžasného plameniaka. No vedel skutočne všetko, čo potreboval? Jasné, že nie.

Pri počitaní ho prerušila Čajka a povedala mu: „Ta to toten zobak, to ani šumne štverce ani trojuhelniky zos caločiselnima stranama!“

Andrej pozerajúc sa na svoje kachličky neprepadol panike a vymyslel spôsob, ako vypočítať aj plochu zobáka, a to veľmi prefíkaným spôsobom, ktorý si zapísal do denníčku:

Najprv si všimnime, že čiary na konci zobáka sú úsečky. V strede každej úsečky si skúsme nakresliť vodorovnú čiaru, ktorá nám štvorec, ktorý úsečku ohraničuje, rozdelí na dve symetrické časti. Tieto časti sú symetrické v tom, že to, čo je zafarbené na jednej strane, je nezafarbené na druhej. Preto si v mysli vieme popresúvať zafarbené časti štvorčekov tak, aby na jednej strane boli iba prázdne štvorce a na druhej plné.

Tento spôsob však prišiel Čajke zložitý a preto navrhla druhý, a to vypočítať obsah predku zobáku tak, ako keby to bol obdĺžnik. Ten potom vydelila dvoma a ešte odpočítala malý trojuholníček, ktorý bol zo spodku vyrezaný.

Keď Andrej poznal tieto dva triky, už mu nič nestálo v ceste a vypočítal, že plocha plameniakovho zobáka je

$$S_{\text{zob}} = \left(\frac{2\cdot 5}{2} - \frac{2\cdot 1}{2}\right)\cdot(10\,\text{cm}\times 10\,\text{cm}) = 400\,\text{cm}^2\,,$$

Po tomto mu už stačilo dopočítať iba štvorčeky a trojuholníky zo zvyšku hlavy. Celková plocha plameniakovej hlavy mu nakoniec vyšla

$$S = 6\,750\,\text{cm}^2\,,$$

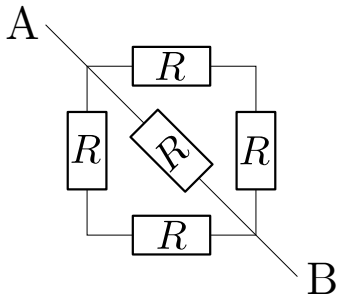
Hodnotenie Hodnotenie tejto úlohy veľmi záležalo od riešenia, dával som veľký pozor na to či bolo riešenie dobre vysvetlené. Pri väčšine riešení som udeľoval 2 body za výpočet obsahu štvorcov, 2 body za výpočet obsahu trojuholníkov a 4 body za dobre zdôvodnený a popísaný spôsob výpočtu obsahu zobáku, posledný 1 bod bol udelený za ukázanie výpočtu.

Ďalšie riešenia boli cez Pickovu vetu, pri ktorých som vyžadoval aj objasnenie Pickovej vety. Keď vysvetlená nebola, tak boli strhnuté 2 body. Za zlý výsledok bol znova ztrhnutý 1 bod.

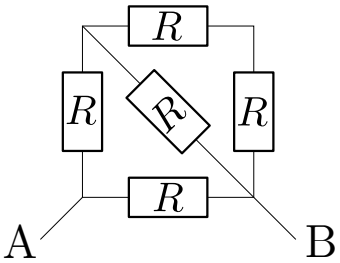
Veľa riešitelov, ktorí dosiahli 8 bodov, stratili 1 bod iba na tom, že nedostatočne vysvetľovali svoj postup.

1.6 La diagonala (opravovala Čajka, vzorák Jerguš)

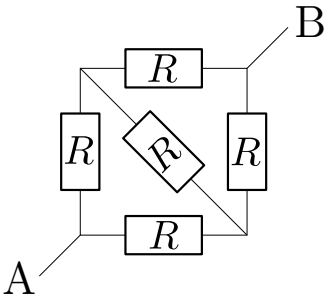
Vypočítajte odpor medzi bodmi A a B v nasledujúcich schémach:



Obr. 11: Schéma 1



Obr. 12: Schéma 2



Obr. 13: Schéma 3

Všade platí, že odpor R má veľkosť $R = 1\,\Omega$.

Najprv sa pozrime na prvé zapojenie. Jednoducho si ho vieme prekresliť tak, aby z obrázku bolo zrejmé, že ide vlastne o tri paralelné vetvy s odpormi $2R$, R a $2R$. Najprv zistime spoločný odpor prvých dvoch vetiev:

$$R_1 = \frac{2R \cdot R}{2R + R} = \frac{2R}{3}\,,$$

Teraz spravíme rovnaký výpočet aj pre tretiu vetvu:

$$R_{\text{celk}} = \frac{R_1 \cdot 2R}{R_1 + 2R} = \frac{R}{2}\,,$$

Druhé zapojenie je len zložitejšie na prekresľovanie. Najprv si môžeme všimnúť, že dva rezistory, ktoré su napojené na strednú vetvu (ten najviac vpravo a najviac hore), sú so šikmo zapojeným rezistorom zapojené paralelne. Teda celkový odpor týchto troch rezistorov môžeme vypočítať zo základného vzorcu

$$\frac{1}{R_2} = \frac{1}{2R} + \frac{1}{R} = \frac{3}{2R} \qquad \Rightarrow R_2 = \frac{2R}{3}\,,$$

K tomuto odporu je sériovo zapojený odpor, ktorý je najviac vľavo. Ich celkový odpor je

$$R_3 = R + \frac{2R}{3} = \frac{5R}{3}\,,$$

Následne si môžeme všimnúť, že nám ostalo jednoduché paralelné zapojenie, ktorého odpor vieme vypočítať ako

$$R_{\text{celk}} = \frac{R_3 \cdot R}{R_3 + R} = \frac{5R}{8}\,,$$

V treťom zapojení si môžeme všimnúť krásnu symetriu: ak sa zamyslíme, tak si všimneme, že uzly napajajúce rezistor v strede sú voči sebe symetrické tak, že rozdiel ich potenciálov je nulový. Z tejto informácie vieme povedať, že aj napätie na rezistore v strede je nulové a teda ho môžeme z obvodu „vystrihnúť“. Po tejto úprave sa z obvodu stáva obyčajné paralelné zapojenie s odporom

$$R_{\text{celk}} = \frac{2R \cdot 2R}{2R + 2R} = R\,,$$

Hodnotenie Za každú časť ste mohli získať 3 body. Z toho jeden za správne prekreslenie a 2 za výpočet. V tretej časti bol 1 bod za obrázok, 1 za výpočet a 1 za vysvetlenie prečo môžeme „vystrihnúť“ rezistor.

Výsledková listina po 1. kole letnej časti 2013/2014

	Meno	Škola	1	2	3	4	5	6	♡	Σ_1	Σ
1	Filip Čermák	Gygo	9	9	9	9	9	9	0	54,00	54,00
2	Matej Krásny	ŠpMNDaG	9	8	9	9	8	9	0.83	52,83	52,83
3	Juraj Vasek	ZŠ M.Kukuč	9	8	9	7	9	9	0	51,00	51,00
4	Jana Sadovská	Gym Met	9	7	9	9	9	6	0	49,00	49,00
5	Katarína Chrappová	G Bajkalská	9	7	8	6	9	9	0	48,00	48,00
5	Marek Horanský	ŠpMNDaG	9	8	9	9	8	5	0	48,00	48,00
7	Michaela Leinwatherová	G Papánka	9	8	9	7	5	9	0	47,00	47,00
8	Filip Rácz	G AV	6	9	9	8	6	8	0	46,00	46,00
8	Lucia Görögová	GsvCaM	7	7	9	9	8	6	0	46,00	46,00
8	Michaela Dlugošová	ZŠsMŠ Franc	8	8	9	7	5	9	0	46,00	46,00
8	Patrik Grman	CZŠ Piešťany	9	7	4	9	8	9	0	46,00	46,00
12	Michal Smoleň	ZŠ M.Kukuč	9	6	4	7	1	9	9.72	45,72	45,72
13	Iveta Janitorová	ZŠ M. Ida	6	8	8	7	9	6	0	44,00	44,00
13	Paulína Smolárová	ŠpMNDaG	9	8	9	8	4	6	0	44,00	44,00
15	Marcel Palaj	ZŠ Hr	6	8	5	7	6	3	5.32	40,32	40,32
16	Martin Petrovič	ZŠ NbM	6	7	9	5	4	8	0	39,00	39,00
17	Peter Onduš	G Alejová	6	8	9		6	9	0	38,00	38,00
18	Marek Spišiak	ZŠ M.Kukuč	7	7	5	7	6		5.63	37,63	37,63
19	Marek Koman	G Alejová	8	4	9		8	8	0	37,00	37,00
20	Matej Martaus	ZŠsMŠ JV Zak.	9	8			6	6	5.8	34,80	34,80
21	Marek Hlavatý	GJGT	6		9		9	4	0	28,00	28,00
22	Samuel Gašper	GPUK	4	5	4	4	1		9.72	27,72	27,72
23	Timotej Gruchalák	ZŠ M.Kukuč	5		7	4	3		5.32	24,32	24,32
24	Nikoletta Bucsanszká	ZŠsMŠ Franc	5		9		5	4	0	23,00	23,00
25	Jakub Smolka	ZŠPŠ	9				1		0	10,00	10,00
26	Natália Tóthová	ZŠ Krosnianska					7		0	7,00	7,00
27	Simona Rečičárová	ZŠsMŠ Franc	2				2		0	4,00	4,00
28	Dušan Kavický	GJH						-42	0	-42,00	-42,00