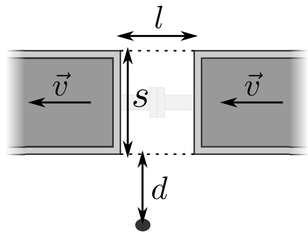
Fyzikálny korešpondenčný seminár
7. ročník, 2013/2014
UFO, KTFDF FMFI UK, Mlynská dolina, 84248 Bratislava
e-mail: otazky@fks.sk web: http://ufo.fks.sk

Vzorové riešenia 2. kola letnej časti 2013/2014

2.1 Čistý prelet (opravoval Jerguš S.)

Indiánom stavba železníc cez ich rodnú prériu spôsobila veľké škody. No čo mohli robiť? Stavbu sa im zastaviť nepodarilo. Strieľanie šípov po vagónoch tiež nemalo veľký efekt. Tak sa zmierili s osudom a vymysleli si novú zábavku. Jej cieľom bolo prestreliť šíp pomedzi dva vagóny idúceho vlaku tak, aby sa ani jedného vagónu nedotkol.

Strelec je vzdialený $d = 50\,\mathrm{m}$ od koľajníc a mieri kolmo na ne. Môže vystreliť, kedy to uzná za vhodné (nie len v zobrazenej chvíli). Medzera medzi vagónmi, cez ktorú má prestreliť, je dlhá $l = 0{,}5\,\mathrm{m}$ a vlak sa pohybuje rýchlosťou $v = 20\,\mathrm{m/s}$. Vagón má šírku $s = 1\,\mathrm{m}$.



Obr. 1: Medzera medzi vagónmi

Aké sú všetky hodnoty rýchlostí c, ktorými môže indián strieľať, aby jeho šíp preletel medzerou bez dotknutia sa vagónov?

Predpokladajte, že šíp letí stále priamočiaro práve tou rýchlosťou, ktorou ho indián vystrelil.

Ako prvé si môžeme uvedomiť, že vzdialenosť d je pre nás absolútne nezaujímavá: ak vieme pomedzi vagóny šíp prestreliť priamo spred vlaku (tzn. zo vzdialenosti $d_0 = 0\,\mathrm{m}$), tak by sme to vedeli aj zo vzdialenosti d. Stačí vystreliť o čas $t = d/c$ skôr. Za tento čas totiž doputuje vystrelený šíp presne k boku vlaku. V nasledujúcej úvahe preto predpokladajme, že indián stojí tesne pri koľajniciach.

Skúsme nájsť najpomalšiu rýchlosť $c_{\min}$, ktorá stačí na prestrelenie šípu cez medzeru medzi vagónmi. V najlepšom prípade môžeme vystreliť hneď, ako sa pred nami objaví medzera medzi vagónmi. V tejto medzere sa šíp bude môcť pohybovať najviac po dobu

$$t_{\max} = \frac{l}{v}\,.$$

Toto je totiž čas, za ktorý sa začiatok druhého vagónu dostane na miesto konca prvého vagónu. Ak sa šíp bude pohybovať v medzere dlhší čas, tak do neho druhý vagón narazí. To znamená, že za tento čas musí vystrelený šíp preletieť dĺžku rovnú šírke s vagóna. Minimálna rýchlosť šípu je teda

$$c_{\min} = \frac{s}{t_{\max}} = v\frac{s}{l}\,.$$

Po dosadení číselných hodnôt dostaneme

$$c_{\min} = \frac{20\,\mathrm{m/s}\cdot 1\,\mathrm{m}}{0{,}5\,\mathrm{m}} = 40\,\mathrm{m/s}\,.$$

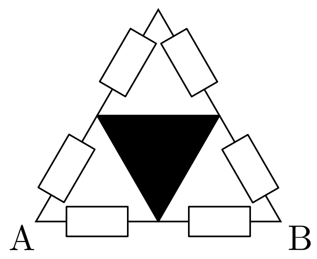
Zamyslime sa, aká môže byť maximálna rýchlosť šípu. Pokiaľ vystrelíme šíp rýchlosťou väčšou ako c_{min} hneď, keď sa pred indiánom objaví medzera, tak šíp určite stihne cez medzeru prejsť. Zdá sa teda, že akákoľvek rýchlosť väčšia ako c_{min} nám vyhovuje. Nie je to však pravda. Príroda nám totiž ohraničenie maximálnej rýchlosti zaviedla sama. Týmto ohraničením je rýchlosť svetla. Vyplýva to z teórie relativity, ktorú sformuloval Albert Einstein na začiatku 20. storočia. Podľa nej sa nemôže žiaden hmotný predmet (teda ani šíp) pohybovať rýchlejšie, ako je rýchlosť svetla, teda približne 300 000 000 m/s.

Veľmi podobným spôsobom sa v roku 1850 merala samotná rýchlosť svetla. Ak vás zaujíma, ako vyzerala aparatúra na meranie rýchlosti svetla, môžete si vygoogliť heslo *Fizeau – Foucault apparatus*.

Hodnotenie: 5 bodov sa udeľovalo za rozoznanie dolného ohraničenia rýchlosti, 2 body sa udeľovali za horné ohraničenie rýchlosti a 2 body sa udeľovali za numerické výpočty.

2.2 Trojuholník (opravoval Jerguš G.)

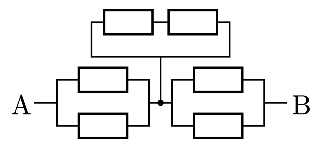
Aký je odpor tohto zapojenia medzi bodmi A a B?



Obr. 2: Odporové zapojenie

Každý odpor má veľkosť R, čierny trojuholník na obrázku je dokonale vodivý.
Pri riešení tohto príkladu nezabúdajte na náš študijný text o odporoch[1]!

Hlavnou úlohou bolo správne si prekresliť odporové zapojenie. Čierny trojuholník v strede je dokonale vodivý, preto ho berieme ako uzol. S touto informáciu môžeme zapojenie zakresliť ako na obrázku.



Obr. 3: Prekreslené zapojenie

V strede vidíme vetvu, ktorá začína aj končí v tom istom bode, čo znamená, že je úplne zbytočná, preto s ňou ďalej nemusíme rátať. Zostali dve paralelné zapojenia, ktoré sú zapojené v sérii. Na to už vieme použiť známe vzorce na počítanie odporov.

$$R_{\mathrm{celk}} = 2\frac{R \cdot R}{R + R} = 2\frac{R^2}{2R} = R\,.$$

Celkový odpor trojuholníkového zapojenia je teda R.

[1] Nájdete ho na `http://ufo.fks.sk/archiv/2013_14/7knizkaLeto1.pdf`

Hodnotenie Úlohu ste mali správne takmer všetci. Ak ste mali dobrý postup a výpočet, dostali ste 9 bodov.

2.3 Koktejl (opravoval Samo C.)

Soľ pri tom, ako sa rozpúšťa, uvoľňuje teplo. A nás by zaujímalo, koľko tepla sa uvoľní pri jej rozpúšťaní na jeden gram kuchynskej soli. Túto veličinu budeme nazývať rozpustné teplo kuchynskej soli.

Merať odporúčame nasledovne: zoberte si dve nádoby, pričom jednu viete vložiť do druhej a vyplňte medzeru medzi nimi ľadom. Potom do vnútornej nádoby dajte presné množstvo ľadu a soli, zmiešajte, aby sa všetka soľ rozpustila a nechajte uzavreté ustáliť. Zo zloženia výslednej ustálenej zmesi dorátajte, koľko energie sa uvoľnilo pri rozpúštaní soli.

a) Prečo v postupe treba vyplniť medzeru medzi nádobami ľadom? (1 bod)

b) Prečo je potrebné uzatvoriť vnútornú nádobu počas ustaľovania? (1 bod)

c) Aké množstvo látok ste vložili dovnútra? (1 bod)

d) Aké bolo zloženie výslednej zmesi? (2 body)

e) Teraz vypočítajte rozpustné teplo soli. Vysvetlite, prečo ho rátate tak, ako ho rátate. (4 body)

Ak aj nebudete experiment robiť, skúste odpovedať na otázky a), b) a odvodiť vzťah na výpočet v časti e).

V prvom rade si poďme ujasniť, ako by celý tento experiment mal fungovať. Podľa zadania sa pri rozpúšťaní soli vo vode uvoľňuje teplo. Keď sa kryštalická soľ rozpúšťa, spotrebováva sa energia na rozbíjanie väzieb, ktoré boli pôvodne v kryštáli. Avšak tiež sa vytvárajú väzby medzi vodou a iónmi a pri tomto procese sa uvoľňuje energia. To, či sa pri reakcií uvoľní teplo, závisí od rozdielu týchto energií. Nakoniec po ustálení budeme mať vo vnútornej nádobe ľad a vodu s teplotou $0\,^\circ\mathrm{C}$, pretože ich teplota sa bude vyrovnávať. Tým pádom ale budeme vedieť jednoducho zrátať, koľko energie sa uvoľnilo. Poďme sa teda za radom pozrieť na jednotlivé časti úlohy:

Prečo v postupe treba vyplniť medzeru medzi nádobami ľadom? V teórii sme neuvažovali s tepelnou výmenou s okolím a preto sa s ňou musíme pokúsiť v praxi vysporiadať. Rozumne vyrátať, ako by presne prebiehala, nevieme. Keď však dáme ľad s teplotou $0\,^\circ\mathrm{C}$ do vonkajšej nádoby a vo vnútornej budeme mať celý čas zmes s teplotou $0\,^\circ\mathrm{C}$ (v praxi nám môže vznikať teplejšia voda, ale tá okamžite začne topiť ľad vo vnútornej nádobe), tak budú mať tieto dve nádoby celý čas rovnakú teplotu. Pritom ale s okolím si bude teplo vymieňať iba vonkajšia nádoba (bude sa v nej topiť ľad, teplota zostáva rovnaká). Vnútorná nádoba si teda so svojím okolím teplo vymieňať nebude.

Prečo je potrebné uzatvoriť vnútornú nádobu počas ustaľovania? Jednak kvôli tomu, aby sa nám voda, ktorá bude v tejto nádobe vznikať, neodparovala. Tento efekt však môžeme považovať za zanedbateľný, pretože odpar vody pri takejto nízkej teplote je veľmi malý. Na druhej strane, aj vzduch obsahuje vodné pary a nechceme, aby vo vnútornej nádobe kondenzovali. Tým, že látky vo vnútornej nádobe izolujeme od okolitého prostredia, sa nám podarí tieto dva efekty eliminovať.

Aké množstvo látok ste vložili do vnútra? Množstvo látok je celkom neurčitý pojem, mohli ste totiž merať hmotnosť, alebo objem (podľa toho, čo sa dá rozumne merať). V tomto prípade bolo oveľa výhodnejšie merať hmotnosť, pretože práve tá najviac vystupuje v kalorimetrickej rovnici, ktorú budeme neskôr pri výpočtoch používať. Rovnako potrebujeme odmerať aj hmotnosť soli, keďže máme vypočítať, koľko tepla sa uvoľní na jeden gram soli.

Aké bolo zloženie výslednej zmesi? Zas sa oplatilo odmerať hmotnosť látok, ktoré boli vo vnútornej nádobe (slanej vody a ľadu).

Teraz vypočítajte rozpustné teplo soli. Čo máme zatiaľ namerané? Vieme, koľko ľadu a koľko soli sme na začiatku dali do vnútornej nádoby. Tiež vieme, koľko vody a koľko ľadu sa v nej nachádzalo na konci po ustálení. Teplota látok vo vnútornej nádobe na začiatku, aj na konci bola 0 °C a preto nám stačí zistiť, koľko ľadu sa roztopilo. Z toho jednoducho vypočítame, koľko energie sme rozpúšťaním soli získali. Nech je hmotnosť vody na konci m_v a hmotnosť použitej soli m_s. Hmotnosť ľadu, z ktorého vznikla táto voda, bola potom $m_\mathrm{v} - m_\mathrm{s}$ (keďže na konci v nej bude rozpustená soľ). To, koľko energie potrebujeme na to, aby sme roztopili 1 kg ľadu, nám udáva veličina nazývaná *merné skupenské teplo topenia.* To sa bežne nachádza vo fyzikálnych tabuľkách alebo sa dá nájsť na internete. Konkrétne pre ľad je táto veličina $l_t = 334\,000\,\mathrm{J/kg} = 334\,\mathrm{J/g}$. Spotrebované teplo na roztopenie ľadu potom bude

$$Q = l_t m = l_t(m_\mathrm{v} - m_\mathrm{s})\,.$$

Toto teplo dostaneme práve rozpustením soli s hmotnosťou m_s. My ale chceme vypočítať, koľko energie sa uvoľní na jeden gram soli, takže teplo Q vydelíme hmotnosťou soli

$$\frac{Q}{m_\mathrm{s}} = \frac{l_t \cdot (m_\mathrm{v} - m_\mathrm{s})}{m_\mathrm{s}}$$

Vyzerá to tak, že sme boli schopní celkom bezbolestne vypočítať to, čo sme chceli. Je to ale úplne správne?

Kde nastal problém? Na začiatku sme si hovorili, že to, či sa pri rozpúšťaní energia uvoľňuje alebo spotrebúva, závisí od rozdielu dvoch energií. V prípade soli sa však energia spotrebúva, teda v zadaní sme mali chybný údaj. Na rozbitie iónových väzieb v kryštáli soli totiž treba oveľa viac energie, ako sa nám uvoľní tým, že sa soľ hydratuje (vytvoria sa nové väzby medzi vodou a soľou). Čo nám takáto zmena spôsobí?

Človek by bol povedal, že nám vo vnútornej nádobe voda ani nevznikne, veď rozpúšťajúca sa soľ odoberá z ľadu energiu. No napriek tomu sa určité množstvo ľadu roztopí. Prečo?

Malé množstvo ľadu by sa roztopilo aj bez soli, len by hneď zmrzlo naspäť. Teplota vyjadruje, ako veľmi sa hýbu častice danej látky. V prípade ľadu sú tieto častice usporiadané v kryštalickej mriežke, kde kmitajú. Kde-tu sa ale stane, že nejaká častica kmitá rýchlejšie a potom takpovediac „uletí“ preč z tejto mriežky, teda sa „roztopí“ (aj keď pri jednej častici sa dá ťažko hovoriť o jej skupenstve). Ak sa v takýchto uletených časticiach rozpustí soľ, tak tento roztok už bude mať nižšiu teplotu topenia (pre zaujímavosť 10%

roztok soli má teplotu topenia -6 °C, 20% až -16 °C). My ale vieme, že pri rozpúšťaní sa energia spotrebúva, preto bude paradoxne tento roztok dokonca chladnejší, ako samotný ľad. Ich teploty sa budú vyrovnávať a po ustálení dostaneme zmes, ktorá bude mať nižšiu teplotu, ako mal samotný ľad na začiatku. Spočítať, koľko tepla sa spotrebuje pri rozpustení soli, by sme ale vedeli aj v tomto prípade. Len by sme ešte potrebovali odmerať teplotu zmesi na konci. Potom si vieme z kalorimetrickej rovnice spočítať, koľko tepla treba na ochladenie ľadu a vody.

$$Q_{\text{ochladenie}} = (m_{\text{v}}c_{\text{v}} + m_{\text{l}}c_{\text{l}})\Delta t\,.$$

pričom m_{v} je hmotnosť vody na konci a m_{l} je hmotnosť ľadu na konci. Keby sme chceli byť presní, mali by sme si ešte zistiť, aká je merná tepelná kapacita daného roztoku soli (lebo tam nemáme čistú vodu). Potom už celkové spotrebované teplo bude

$$Q = Q_{\text{ochladenie}} + Q_{\text{rozpustenie}}\,.$$

pričom $Q_{\text{rozpustenie}}$ už spočítať vieme. Všimnime si, že teplo potrebné na ochladenie bude mať záporné znamienko, zatiaľčo na rozpustenie kladné. Celkovo by tento súčet mal byť tiež záporný, pretože sme si povedali (tentokrát už správne), že sa celkovo teplo spotrebúva.

Celkovo fakt, že rozpúšťaním soli sa teplo spotrebúva, celkom skomplikoval riešenie tohoto príkladu. Ospravedlňujeme sa za to a dúfame, že sme vám nepridali veľa práce navyše. Napokon, človek sa na chybách učí, a preto verím, že ste sa niečo naučili aj vy.

Hodnotenie Body boli rozdelené presne tak, ako bolo uvedené v zadaní. Plný počet za poslednú podúlohu ste však mohli dostať, aj keď ste nesprávne rátali s tým, že pri rozpúšťaní soli sa teplo uvoľňuje.

2.4 Tkáčka sa s tým nepára (opravoval Samík, vzorák Baklažán)

Mladej tkáčke Katke došla niť. Tak zobrala staré tričko, že si nejakú napára. Párala a párala, ale z trička takmer neubúdalo. Viete odhadnúť, koľko metrov nite je v bežnom (napríklad vašom) tričku?

Netipujte! Skúste váš odhad podložiť výpočtom. Uveďte aj veľkosť meraného trička.

Na začiatok, skôr, než začneme niečo presne počítať alebo merať, si urobme hrubú predstavu, koľko nite je asi v tričku. Tričko je kus látky, ktorého obidva rozmery sú *rádovo* jeden meter.[2] Celková plocha trička teda bude rádovo jeden meter štvorcový. Hrúbka nite je rádovo milimeter. Ak by sme teda chceli naskladať metrové kusy nite vedľa seba tak, aby vytvorili štvorec so stranou jeden meter, potrebovali by sme ich 1000. Môžeme teda očakávať, že v tričku bude rádovo jeden kilometer nite.

Jeden kilometer je naozaj veľa a keby sme chceli zistiť dĺžku nite priamo tak, že by sme ju vypárali alebo nejako inak zmerali, zabralo by nám to nehorázne veľa času (rádovo hodiny). Preto to urobíme prefíkanejšie: vezmeme si nejakú menšiu časť trička, zistíme, koľko je v nej nite a potom z toho vypočítame, koľko nite by malo byť v celom tričku.

[2] Slovo *rádovo* znamená, že ide len o veľmi hrubý odhad a v skutočnosti to môže byť aj niekoľkonásobne viac alebo menej, no nie viac, než desaťnásobne

1. Prístup: hmotnostný. Jeden z prístupov, ktorým môžeme tričko rozdeliť, je deliť ho podľa hmotnosti. Hmotnosť je vo všeobecnosti veľmi dobrá veličina, keď treba deliť telesá na časti, lebo sa takmer vôbec nemení, nech s telesom robíme čokoľvek, aj keby sme ho rozpárali. Môžeme si odmerať nejaký kus nite a odvážiť ho. Potom odvážime celé tričko a vypočítame, aký dlhý by musel byť kus nite, aby vážil rovnako veľa. Taká dlhá musí byť aj niť, ktorá je v tričku.

Tu ale nastáva jeden problém. Ak totiž chcene niečo merať, potrebujeme, aby meraná veličina bola rádovo väčšia, než najmenši dielik na našom meradle, inak by bolo naše meranie veľmi nepresné. Ak by sme teda chceli použiť nejaké bežné kuchynské váhy, ktoré majú málokedy presnosť lepšiu než 1 gram, potrebovali by sme aspoň 10 gramov nite, aby sme dostali rozumnú presnosť. Bežné tričko váži okolo 100 gramov a ako sme už odhadli, je v ňom rádovo kilometer nite. Potrebovali by sme preto rádovo sto metrov nite, aby bolo naše meranie rozumne presné. A to je trochu veľa. Ak ale máte prístup k nejakým superpresným váham, potom je tento spôsob odhadu veľmi dobrý.

2. Prístup: plošný. Iný prístup je ísť na to cez plochu. Vezmeme si nejaký menší kúsok trička, zistíme koľko je v ňom nite a odmeriame jeho plochu. Potom odmeriame plochu celého trička a vypočítame, koľko je v ňom nite. Treba si ale dať pozor, aby sme tričko nenatiahli ani pri jednom z týchto meraní (resp. pri oboch meraniach rovnako), keďže naťahovaním sa plocha trička mení. Niť v tričku tvorí pravidelný vzor, ktorého jedno opakovanie má veľkosť asi 1 mm × 1 mm. Ak by sme si teda zvolili náš kúsok ešte menší, neobsahoval by ani jedno opakovanie vzoru, teda by v ňom mohlo byť úplne iné množstvo nite, než v susednom rovnako veľkom kúsku. Preto by sme chceli, aby bol náš kúsok mnohonásobne väčší, napríklad 1 cm × 1 cm. Takáto veľkosť je aj dostatočne veľká na to, aby sa dala dosť presne odmerať. Mohli by sme si zobrať aj väčší kúsok, ale presnosť si tým veľmi nezvýšime, len si prirobíme viac roboty. Ostáva nám ešte zistiť, koľko je v danom kúsku nite. To sa dá tiež urobiť viacerými spôsobmi.

1. Spôsob: Nepárať sa s tým. Najpriamočiarejšie je nejaký kúsok látky rozpárať. Ak ste mali nejaký kus látky z trička, ktorý ste mohli rozpárať, tento spôsob je veľmi jednoduchý a účinný. My sme to urobili s kúskom starej tričkoviny o rozmeroch 2,5 cm × × 2,5 cm. Bolo v nej 42 riadkov nite, náhodných 5 z nich sme zmerali. Dostali sme tieto hodnoty:

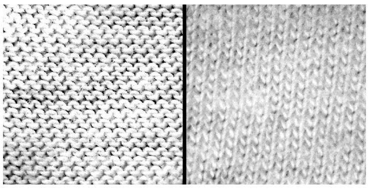
číslo merania	1	2	3	4	5	priemer
dĺžka nite [cm]	11,2	10,6	10,4	10,5	10,7	10,7

V celom kúsku teda bolo asi $42 \cdot 10{,}7\,\mathrm{cm} = 449\,\mathrm{cm}$. V kúsku 1 cm × 1 cm je teda asi

$$449\,\mathrm{cm} \cdot \frac{1\,\mathrm{cm} \times 1\,\mathrm{cm}}{2{,}5\,\mathrm{cm} \times 2{,}5\,\mathrm{cm}} = 71{,}8\,\mathrm{cm}\,.$$

Toto meranie bolo vcelku presné, ale merali sme kus látky, ktorý nebol priamo z nášho meraného trička, teda nemusí úplne zodpovedať nášmu tričku.

2. Spôsob: Okometria. Ak nemáme kus látky, ktorý môžeme rozpárať, môžeme dĺžku nite odhadnúť aj tak, že sa pozrieme na nerozpáraný kus látky. Pri pohľade zblíka vyzerá látka takto:

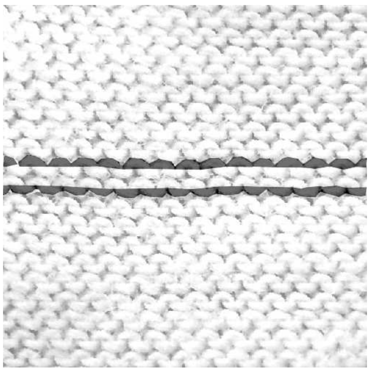


Obr. 4: Látka 1 cm × 1 cm, vľavo rub, vpravo líc

Vzor, ktorým je tkaná, je takýto:

Obr. 5: Vzor tkaniny

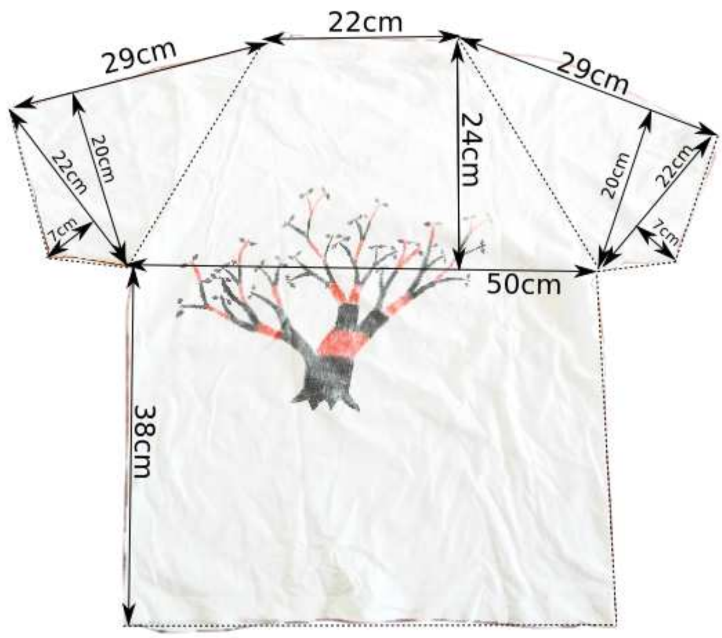
Keď sa teda pozrieme na rubovú stranu tkaniny, z jedného riadku nite vidíme túto časť:



Obr. 6: Rubová strana tkaniny

Časť nite, ktorú vidíme, tvoria dva takmer súvislé úseky dĺžky 1 cm. Okrem toho ešte asi rovnako dlhú časť tohto riadku nite nevidíme. Jeden riadok nite má teda dĺžku asi 4 cm. V našom kúsku je takýchto riadkov 19 (18 celých, polovica hore a polovica dole), teda je v ňom asi $19 \cdot 4 = 76$ cm nite. Reálne riadky sú dosť malé a na tričku sa ťažko počítajú, preto sme si ho odfotili a riadky rátali na fotke. Aby sme vedeli, aký kúsok fotky zodpovedá centimetru, odfotili sme si spolu s tričkom aj pravítko.

Nakoniec ešte potrebujeme zistiť plochu celého trička a vypočítať množstvo nite v ňom. Plochu jednej strany trička si môžeme približne rozdeliť na obdĺžnik, lichobežník a štyri trojuholníky:



Obr. 7: Rozdelenie trička

Tričko má dve strany, teda celková plocha látky bude dvojnásobok plochy jednej strany, teda

$$S = 2 \cdot \left(38 \cdot 50 + \frac{(50+22)\cdot 24}{2} + \frac{29 \cdot 20}{2} + \frac{29 \cdot 20}{2} + \frac{22 \cdot 7}{2} + \frac{22 \cdot 7}{2} \right) \mathrm{cm}^2 = 6\,996\,\mathrm{cm}^2\,.$$

Podľa prvého odhadu je v ňom teda

$$6\,996\,\mathrm{cm}^2 \cdot \frac{71{,}8\,\mathrm{cm}}{1\,\mathrm{cm}^2} = 502\,000\,\mathrm{cm} \doteq 5\,\mathrm{km}$$

nite, podľa druhého je to

$$6\,996\,\mathrm{cm}^2 \cdot \frac{76\,\mathrm{cm}}{1\,\mathrm{cm}^2} = 532\,000\,\mathrm{cm} \doteq 5{,}3\,\mathrm{km}\,.$$

V našom tričku teda bolo približne 5 km nite.

Hodnotenie Väčšina z vás príklad riešila plošným prístupom. 3,5 b ste mohli dostať, ak ste dobre určili, koľko nite je v dostatočne veľkom kuse látky. Rovnako 3,5 b bolo za pekné určenie obsahu trička. Za zvyšné výpočty a úvahy som dával 2 b. Až do jedného bodu som vám strhával za chyby ako napríklad neuvedenie rozmerov, resp. veľkosti trička, príliš malá plocha, na ktorej ste počítali nitky, príliš zjednodušené tvary trička (obdĺžniky), za predpoklad, že nitky idú v tričku rovno, chýbajúce obrázky, či chyby vo výpočtoch a zlé premeny jednotiek.

2.5 Excellujeme! (opravoval Žaba)

- (4 body) Nakreslite v tabuľkovom kalkulátore graf funkcie $y = \sqrt{x}$ od $x = 0$ po $x = 10$.
- (5 bodov) Použitím tabuľkového kalkulátoru vypočítajte nasledovný súčet:

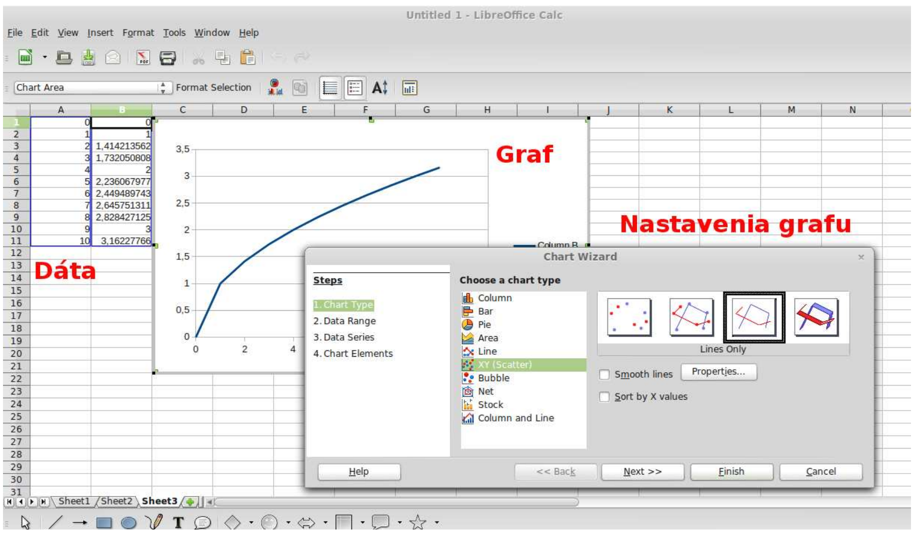
$$1^\pi + 2^\pi + 3^\pi + \cdots + 1000^\pi \,.$$

Na úspešné vyriešenie bolo treba, aby ste si niečo naštudovali sami, použili Google a trochu sa pohrali s vašim tabuľkovým editorom. Nebolo to však vôbec také ťažké a verím, že ste si s tým hravo poradili. Pred tým, ako začnem, ešte upozorním, že ja používam program LibreOffice Calc, takže podľa neho bude písaný tento vzorák. Ak však používate Excel, jednotlivé funkcie by mali fungovať veľmi podobne, ak nie úplne rovnako.

Graf funkcie $y = \sqrt{x}$ Prvý krok bude nájsť funkciu, ktorá bude počítať odmocniny. Už v študijnom texte je však spomínané, že je to funkcia `SQRT`. Ak napríklad do nejakej bunky napíšeme príkaz `=SQRT(9)`, namiesto neho sa nám v bunke objaví číslo 3, čo je druhá odmocnina 9. A asi vás neprekvapí, že do vnútra tejto funkcie nemusíte napísať konkrétne číslo, ale stačí tam dať bunku, z ktorej si túto hodnotu má vybrať. Ak teda do bunky `B1` vložíte výraz `=SQRT(A1)`, tak nech dáte do bunky `A1` ľubovoľné číslo, v `B1` sa objaví jeho odmocnina.

Potešení týmto pozorovaním môžeme teraz do buniek `A1` až `A11` napísať čísla 0 až 10 a do buniek `B1` až `B11` vložiť výrazy `=SQRT(A1)` až `=SQRT(A11)`. Takto sme si pripravili údaje pre náš graf. Zostáva ho už len vykresliť.

Označíme si teda stĺpce `A` a `B` a na lište, alebo v menu v sekcii **Vložiť** nájdeme tlačítko s nápisom **Graf** (anglicky **Chart**). Asi ho spoznáte aj podľa nápadnej ikonky. Otvorí sa vám okno, kde si môžete nastaviť, ako má váš graf vyzerať. Po vyskúšaní viacerých možností prídete na to, že správny typ grafu, ktorý zobrazuje závislosť y-ovej osi od x-ovej je graf: **XY (Rozptyl)** s možnosťou **Iba čiary**[3].



Obr. 8: Vytváranie grafu

[3] Alebo niečo také, po anglicky je to Lines only.

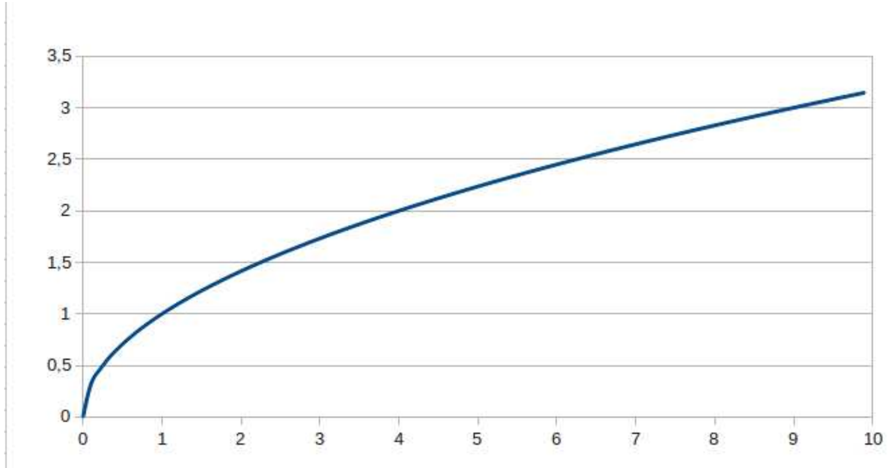
Stlačíte **Dokončiť** a máte to: graf, ktorý predstavuje funkciu $y = \sqrt{x}$. Keď sa naň však pozrieme, nevyzerá pekne, lebo je „kostrbatý“. To je preto, lebo náš graf obsahuje len 11 hodnôt a všetko medzi nimi vie nahradiť len rovnou čiarou. Chcelo by to teda zvýšiť presnosť. Napríklad tým, že pridáme viac hodnôt. Ak by sme mali v grafe 101 hodnôt medzi 0 a 10 s rozdielom 0,1 alebo dokonca 1001 s rozdielom 0,01, náš graf by vyzeral oveľa krajšie a plynulejšie.

Sto hodnôt však nebudeme písať ručne. Preto sa naučíme nový trik – nazvime ho „ťahanie“. Do bunky `A1` napíšme hodnotu 0 a do bunky `A2` napíšme príkaz `= A1 + 0,1`. V bunke `A2` sa teda objaví hodnota 0,1. Kliknime teraz na bunku `A2` a všimnime si, že v jej pravom dolnom rohu sa objavil čierny štvorček. Chyťme ho a potiahnime o dve bunky dodola. A hľa, v bunke `A3` je hodnota 0,2 a v bunke `A4` je 0,3. A keď si na bunku `A3` klikneme, zistíme, že sa v nej nachádza príkaz `=A2+0,1`.

Náš vzorec z bunky `A2`, ktorý znamenal, že „k hodnote bunky nado mnou pripočítaj 0,1“ sa nakopíroval aj do ďalších buniek s rovnakým významom – hodnota v tejto bunke bude o 0,1 väčšia ako hodnota bunky vyššie. Môžeme teda natiahnuť tento vzorec až po riadok 101 a dostaneme všetky želané hodnoty.

No a keď do bunky `B1` napíšeme príkaz `=SQRT(A1)` , znamenajúci „vyrátaj odmocninu z čísla, ktoré je naľavo odo mňa“, môžeme tento príkaz rovnakým spôsobom potiahnuť dole, pričom sa jeho význam nezmení a my dostaneme tabuľku s požadovanými hodnotami.

Následne, tak isto ako predtým, vytvoríme graf a keď sa trochu pohráme so všemožnými nastaveniami, dostaneme nasledujúci obrázok:



Obr. 9: Výsledný graf

Súčet $1^\pi + 2^\pi + \cdots + 1000^\pi$ V študijnom texte je spomenuté, že príkaz `=SUM(C2:C8)` vyráta súčet čísiel v bunkách od `C2` po bunku `C8`. To znamená, že ak by som vedel samostatne vyrátať všetky čísla od 1^π po 1000^π a uložiť ich napríklad do buniek `B1` až `B1000`, tak príkaz `=SUM(B1:B1000)` vyráta presne to, čo potrebujem.

Zostáva teda vypočítať všetky mocniny. Na začiatok si do políčok `A1` až `A1000` uložme čísla 1 až 1000. To vieme spraviť jednoducho pomocou ťahania. Do políčok v stĺpci `B` teda cheme vymyslieť príkaz, ktorý umocní číslo v bunke naľavo na hodnotu π.

Treba nájsť funkciu na umocnenie. Na to nám pomôže kamarát Google[4], do ktorého stačí napísať „libreoffice umocnenie“ (alebo „excel umocnenie“) a trochu sa pohrabať v prvom odkaze. Zistíte, že buď môžete použiť funkciu `=POWER(3;4)`, alebo ešte jednoduchšie, len znak umocňovania `^` – použitie vyzerá nasledovne: `=3^4`.

Zostáva ešte otázka, ako zistiť hodnotu π, aby sme ju nemuseli do editoru písať ručne. Opäť jedno vyhľadávanie „libreoffice pi“ a zistíme, že vieme použiť funkciu `=PI()`, presne tak, ako v Exceli.

Do bunky `B1` teda napíšeme `=A1^PI()` a potiahneme nadol. Do bunky `C1` potom napíšme `=SUM(B1:B1000)`, natiahnime ju do šírky, nech sa tam výsledok zmestí a uvidíme výslednú hodnotu:

$$643\,442\,072\,588{,}339\,.$$

Študijný text káže zaokrúhľovať, a tak toto číslo zaokrúlime a zapíšeme v krajšom tvare $6{,}43 \cdot 10^{11}$.

Hodnotenie Väčšinou ste nemali problém túto úlohu vyriešiť správne. Nejaké bodíky som však kde-tu strhnúť musel. Hlavne v prvej časti som strhával 2 body, ak ste graf funkcie vytvárali len z 11 hodnôt (tak ako prvý obrázok vzoráku). Uznajte sami, že takto vytvorený graf vyzerá kostrbato a nie je taký pekný ako ten, na ktorý som použil 101 hodnôt. Uvedomte si, že nikdy nevytvoríme úplne dokonalý graf funkcie $\sqrt{x}$, ale čím viac hodnôt použijeme, tým bude presnejší a ideálnemu grafu sa bude viac podobať.

No a nejaké tie bodíky som strhol aj za slabšie popísané riešenie. Nezabudnite vždy poriadne popísať čo a *ako* ste to robili. Napríklad presne napíšte, aké vzorce ste použili, nech vidím, že tomu rozumiete.

2.6 Spracovanie experimentálnych dát (opravoval Maťo G.)

V minulej experimentálke ste mali zistiť, či závislosť pre dostrek vody

$$d = C\sqrt{h}$$

platí, alebo neplatí. Paťo to chcel vedieť tiež, a tak sa pustil do merania. Nameral tieto hodnoty:

$h/\,\mathrm{cm}$	$d/\,\mathrm{cm}$			
16	16,7	17,1	16,3	16,8
14	15,8	15,9	15,2	16,1
12	14,5	13,8	13,3	14,1
10	12,4	12,6	12,8	12,5
8	11,4	10,5	11,8	10,7
6	9,5	8,7	9,6	9,9
4	7,9	8,2	8,3	8,6

a.) Pre každú výšku h vypočítajte priemernú vzdialenosť $\langle d \rangle$ a jej štandardnú odchýlku.

b.) Z rovnice $d = C\sqrt{h}$ vyjadrite C a pomocou pravidiel zo seriálu napíšte vzorec, podľa ktorého vypočítame nepresnosť C.

Pomôcka: nepresnosť pre x^2 vypočítame z pravidla o súčine: pretože $x^2 = x \cdot x$, tak relatívna chyba x^2 bude dvakrát väčšia ako relatívna chyba x.

[4] Alebo aj Bing ak nechcete byť mainstreamoví.

c.) Pre každé meranie výšky vypočítajte príslušnú hodnotu C a jeho nepresnosť. Obe čísla zaokrúhlite na 2 desatinné miesta.

d.) Nájdite také C, ktoré bude v rámci chyby vyhovovať všetkým meraniam.

S prvou časťou úlohy ste väčšinou nemali problém. Stačilo len vypočítať aritmetický priemer a štandardnú odchýlku dostreku (veličiny d) zo štyroch meraní pre každú zo siedmich výšok h. To spravíme jednoducho, buď dosadením do vzorca zo seriálu, alebo použitím nejakého softvéru:

$$\langle d\rangle = \frac{d_1 + d_2 + d_3 + d_4}{4}\,,$$
$$\sigma_d = \sqrt{\frac{(d_1 - \langle d\rangle)^2 + (d_2 - \langle d\rangle)^2 + (d_3 - \langle d\rangle)^2 + (d_4 - \langle d\rangle)^2}{4\cdot 3}}\,.$$

Pre namerané hodnoty sú výsledky uvedené v tabuľke nižšie. Z rovnice $d = C\sqrt{h}$ rýchlo a bez ťažkostí dostávame $C = d/\sqrt{h}$. Pozorne čítajte ďalej, pretože v určení nepresnosti ste mnohí urobili chybu.

V prvom rade si bolo treba uvedomiť, že nepresnosť vzniká jednak pri veličine h a aj vo veličine d. Pri prvej veličine, h, to je spôsobené tým, že výšku, z ktorej vyteká voda nevieme určiť presne. Túto chybu budeme musieť neskôr odhadnúť. Vo veličine d je chyba taká, akú sme spočítali v predchádzajúcej podúlohe. Poďme teda postupne. Na to, aby sme vedeli určiť chybu výrazu $d/\sqrt{h}$, musíme najskôr zistiť relatívnu odchýlku $\sqrt{h}$. Zo zadania a z pravidla o súčine vieme, že

$$\delta_{x^2} = \frac{\sigma_{x^2}}{x^2} = 2\delta_x = 2\frac{\sigma_x}{x}\,.$$

To znamená, že ak veličinu umocníme na *druhú*, výsledná relatívna chyba sa nám *zdvojnásobí*. Všeobecne môžeme povedať, že umocňovaním veličiny na n (n vyjadruje ľubovoľné číslo) sa nám relatívna chyba n-násobí. Čo je vlastne odmocnina? Podobne, ako odčítavanie je len pričítavanie opačných čísel, delenie je len násobenie prevrátenými číslami (prevrátené číslo k napríklad 42 je 1/42), aj odmocňovanie je umocňovanie na prevrátené čísla. V našom prípade platí rovnosť $\sqrt{x} = x^{1/2}$, čo znamená, že relatívna chyba bude polovičná, teda

$$\sigma_{\sqrt{h}} = \frac{\delta_h}{2}\sqrt{h} = \frac{\sigma_h}{2h}\sqrt{h} = \frac{\sigma_h}{2\sqrt{h}}\,.$$

Takto, keď vieme nepresnosť $\sqrt{h}$, ľahko získame nepresnosť C, podľa vzorca o chybách zlomkov, ako

$$\frac{\sigma_C}{C} = \frac{\sigma_d}{d} + \frac{\sigma_h}{2\sqrt{h}}\,,$$

z čoho získame

$$\sigma_C = C\left(\frac{\sigma_d}{d} + \frac{\sigma_h}{2\sqrt{h}}\right) = \frac{\sigma_d}{\sqrt{h}} + \frac{\sigma_h d}{2h^{3/2}}\,,$$

pričom σ_h môžeme odhadnúť na 0,1 cm, lebo to je presnosť väčšiny bežných meraniel dĺžky (pravítok, metrov, ...).

Výsledky hodnôt pre C a σ_C uvádzame taktiež v tabuľke:

$h/\,\mathrm{cm}$	$\langle d\rangle/\,\mathrm{cm}$	$\sigma_d/\,\mathrm{cm}$	$C/\sqrt{\mathrm{cm}}$	$\sigma_C/\sqrt{\mathrm{cm}}$
16	16,73	0,17	4,18	0,06
14	15,75	0,19	4,21	0,07
12	13,93	0,25	4,02	0,09
10	12,58	0,09	3,98	0,05
8	11,10	0,30	3,92	0,13
6	9,43	0,26	3,85	0,14
4	8,25	0,14	4,13	0,12

Pozrime sa teraz na zistené hodnoty C, napríklad v predposlednom riadku. Štandardná odchýlka znamená, že číslo by malo ležať niekde medzi hodnotami $3{,}85 - 0{,}14 = 3{,}71$ a $3{,}85 + 0{,}14 = 3{,}99$.[5] Keď sa ale pozrieme napríklad na prvé meranie, vidíme, že toto meranie „dovoľuje“ hodnoty C v rozsahu 4,12 až 4,24. Teda neexistuje žiadne C, ktoré by vyhovovalo všetkým meraniam v rámci ich chýb.[6]

Hodnotenie Za časti a.) a c.) sa získavali po 2 body (hodnota a nepresnosť), za vyjadrenie C v časti b.) bol 1 bod, za určenie odchýlky 3 body a nakoniec za časť d.) bol 1 bod.

Často sme strhávali body za takpovediac šialené zaokrúhľovanie – keď sa v zadaní nepíše, že máte zaokrúhľovať, neznamená to, že máte vypísať 10 desatinných miest: rozumné zaokrúhľovanie by mala byť samozrejmosť.

Úloha nebola ťažká, len ju stačilo správne pochopiť. Nezúfajte pred zdanlivo ťažkými zadaniami, ak vás zrovna nenapadá riešenie, môžete sa k tomu vrátiť neskôr. Samozrejme to platí len vtedy, ak nerobíte všetko na poslednú chvíľu.

[5] Väčšinou sa tento fakt zapisuje takto: $C = 3{,}85 \pm 0{,}14$.

[6] Stále ale môžeme vypočítané hodnoty pre C spriemerovať a určiť tak nejaké „priemerné“ C. To už ale nebude vyhovovať zadaniu.

Výsledková listina po 2. kole letnej časti 2013/2014

	Meno	Škola	1	2	3	4	5	6	♡	Σ_2	Σ
1	Filip Čermák	Gygo	9	9	8	9	9	7	0	51,00	105,00
2	Juraj Vasek	ZŠ M.Kukuč	8	9	9	8	7	3	0	44,00	97,00
3	Matej Krásny	ŠpMNDaG	8	9	6	6	3	7	4.68	43,68	96,51
4	Michaela Dlugošová	ZŠsMŠ Franc	9	9	8	7	7	8	0	48,00	94,00
5	Michaela Leinwatherová	G Papánka	8	9	8	6	6	8	0	45,00	92,00
6	Patrik Grman	CZŠ Piešťany	7	9	3	8	9	8	0	44,00	90,00
7	Filip Rácz	G AV	8	9	7	8	5	4	0	41,00	87,00
8	Paulína Smolárová	ŠpMNDaG	8	9	7	5	6	7	0	42,00	86,00
9	Marek Horanský	ŠpMNDaG	8	9	3	6	7		0	33,00	81,00
10	Jana Sadovská	Gym Met	5	9		5	5	5	0	29,00	78,00
11	Lucia Görögová	GsvCaM	3	9		7	7	4	0	30,00	76,00
12	Marcel Palaj	ZŠ Hr	8	9	1	2	6	2	5.82	33,82	74,14
13	Peter Onduš	G Alejová	7	9		5	8	7	0	36,00	74,00
14	Iveta Janitorová	ZŠ M. Ida			7	8	7	2	0	24,00	68,00
15	Matej Martaus	ZŠsMŠ JV Zak.	9		4	4	6	1	5.76	29,76	64,56
16	Marek Spišiak	ZŠ M.Kukuč	7	1	4	3		3	5.18	23,18	63,50
17	Katarína Chrappová	G Bajkalská							0	0,00	48,00
18	Samuel Gašper	GPUK	9		1	1			7.1	18,10	45,82
19	Michal Smoleň	ZŠ M.Kukuč							0	0,00	45,72
20	Marek Hlavatý	GJGT	4	8					0	12,00	40,00
21	Martin Petrovič	ZŠ NbM							0	0,00	39,00
22	Marek Koman	G Alejová							0	0,00	37,00
23	Nikoletta Bucsanszká	ZŠsMŠ Franc		1	1	3			0	5,00	28,00
24	Natália Tóthová	ZŠ Krosnianska	8	9	3				0	20,00	27,00
25	Timotej Gruchalák	ZŠ M.Kukuč							0	0,00	24,32
26	Jakub Smolka	ZŠPŠ				2			0	2,00	12,00
27	Simona Rečičárová	ZŠsMŠ Franc				4			0	4,00	8,00
28	Alexandra Pešátová	GPUK					7		0	7,00	7,00
29	Kristian Kolencik	ZŠsMŠ JV Zak.				2			0.83	2,83	2,83