Fyzikálny korešpondenčný seminár
7. ročník, 2013/2014
UFO, KTFDF FMFI UK, Mlynská dolina, 84248 Bratislava
e-mail: otazky@fks.sk web: http://ufo.fks.sk

Vzorové riešenia 1. kola zimnej časti 2013/2014

1.1 Chobotník pod prúdom (opravoval Paťo)

Chobotník Luxusko nemal čo robiť, a tak sa svojimi šiestimi odpornými chobotmi chytil dokonale vodivej obruče. Aký odpor má celá konštrukcia aj s chobotníkom? Každý chobot má odpor R, zvyšok jeho tela má nulový odpor. Chobotníky sa zapájajú do obvodu vrchným vlasom (V) a úchytom chobotu (CH).

Je jasné, že po zapojení napätia na chobotníka bude nejaký prúd tiecť každým z jeho ramien, rovnako ako obručou. Zaujímavá je práve obruč. Keďže je dokonale vodivá (teda jej odpor je nulový), prúd v nej tečie úplne bez prekážok (fyzikálne povedané bez poklesu napätia). Čo by sa stalo, keby sme jednu šestinu obruče vymenili za drôt, ktorý by bol tiež rovnako vodivý, ale bol dvakrát dlhší? Vôbec nič – prúd by tiekol stále bez poklesu napätia, akurát by tiekol trochu dlhšou cestou. No žiadnym meraním napätia alebo prúdu by sme túto zmenu nezaregistrovali.

Rovnako to ale bude aj vtedy, keď namiesto predĺženia časť obruče skrátime. Či o polovicu, o štvrtinu, alebo o ľubovoľne dlhý kus, nič sa v obvode nezmení.

Znie to fajn, ale čo keby sme tie vodivé kusy zmenšili na úplne maličké (nulové) kúsky? Všetky Chobotníkove chápadlá by sa naraz stretli v jednom uzle. To je ale pozitívna správa, pretože, pri troche predstavivosti, to znamená, že všetky chápadlá sú zapojené voči sebe paralelne. Pre celkový opor Chobotníka R_{Ch} potom platí vzorec

$$\frac{1}{R_{\mathrm{Ch}}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R} = \frac{6}{R},$$

Otočením zlomku teda zisťujeme, že celkový odpor Chobotníka je $R/6$.

Ponaučenie: To, čo sme vlastne urobili, sa nazýva prekresľovanie elektrickej schémy. Teda dva uzly, ktoré sú vodivo spojené, môžeme spojiť do jedného. Platí to aj naopak – jeden uzol môžeme rozdeliť na dva vodivo spojené uzly. Takéto a iné techniky nám potom ukážu, že rôzne nepekné zobrazenia sú vlastne iba sériové alebo paralelné zapojenia.

1.2 Chudjakit (opravoval Jerguš)

Maťo sa rozhodol, že život ho nebaví. Koho by aj bavilo hopsať hore-dole po schodoch na jednej nohe? Zobral teda Sysľovi starú raketu a odletel si na najbližší asteroid, kde začal geologický prieskum. Vtom zrazu objavil zvláštny kameň. Prešiel ho svojím znalým okom a usúdil, že ide o nový minerál. Nazval ho teda po Maťovi - chudjakit. Po tom, čo nameral, že má hustotu $\rho_{ch} = 5000\,\mathrm{kg/m^3}$, poslal ho Maťovi na rozbor. Ten zistil, že chudjakit sa skladá z atómov gažónu a chudjónu, v pomere 1:1 a usporiadané sú v pravidelnej kockovej mriežke takto:

O gažóne sa vie, že jeden atóm váži $m_g = 2\,\mathrm{mg}$ a jeden atóm chudjónu váži $m_{ch} = 3\,\mathrm{mg}$. Aká je vzdialenosť a najbližších dvoch atómov v mineráli?

Táto úloha bola riešená asi každým predstaviteľným spôsobom (aj keď mala jedno zrejmé a jednoduché riešenie, očividne však nebolo až tak zrejmé).

Ak máme kocku s hustotou $5000\,\mathrm{kg/m^3}$, ktorá sa skladá z chudjakitu s hmotnosťou $3\,\mathrm{mg}$ na molekulu a gažonitu s hmotnosťou $2\,\mathrm{mg}$ na molekulu v pomere $1 : 1$, vieme pomerne jednoducho zistiť koľko molekúl sa v tejto kocke nachádza. Premeníme si kg na mg a dosadíme do rovnice

$$5\,000\,000\,000\,\mathrm{mg} = x \cdot 2\,\mathrm{mg} + x \cdot 3\,\mathrm{mg},$$

z ktorej vyjadríme, že

$$x = \frac{5\,000\,000\,000\,\mathrm{mg}}{2\,\mathrm{mg} + 3\,\mathrm{mg}} = 1\,000\,000\,000,$$

Keďže však máme dva typy molekúl, spolu sa budú v kocke nachádzať dve miliardy molekúl. Tieto molekuly sú po kocke rovnomerne rozložené. Ak teda umocníme počet molekúl na hrane kocky troma, získame počet molekúl v celom objeme kocky.

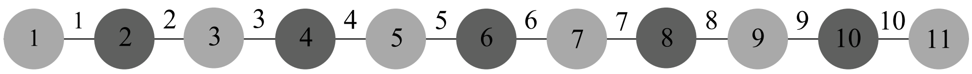
Táto operácia však funguje aj naopak, ak urobíme tretiu odmocninu z počtu molekúl v celej kocke, získame počet molekúl na jednej hrane.

$$\sqrt[3]{2000000000} = 1260$$

Keď už vieme, koľko molekúl je na hrane kocky s objemom $1\,\mathrm{m^3}$, a vieme aj jej dĺžku (neočakávane 1m), vieme zistiť vzdialenosť medzi jednotlivými molekulami.

$$\frac{1\,\mathrm{m}}{1260 - 1} = 0{,}000\,794\,3\,\mathrm{m} = 0{,}7943\,\mathrm{mm}$$

Možno sa pýtate, prečo to „-1“ v predošlom výpočte. Je to tým, že ak je na jednej strane kocky 1260 molekúl tak sa medzi nimi bude nachádzať iba 1259 väzieb (viď obr. 1).



Obr. 1: Molekuly

1.3 Na prechádzke (opravoval Maťo G.)

Jerguš kráčal po ulici a uvidel pred sebou Kaťu kráčajúcu rovnakým smerom. V okamihu, keď Kaťa prechádzala okolo pouličnej lampy , spustil stopky. Keď prišiel k tej istej lampe Jerguš, na stopkách mal $t_1 = 18\,\mathrm{s}$ a stopky zastavil. Všimol si, že Kaťa práve prechádzala okolo stromu a spustil stopky znova. Keď prišiel k tomuto stromu, na stopkách mal $t_1 = 12\,\mathrm{s}$. Z toho usúdil, že kráča rýchlejšie ako Kaťa.

Teraz ho zaujíma, ako dlho mu ešte bude trvať, kým Kaťu dobehne. Pomôžte mu to zistiť!

Úlohy takéhoto typu mávajú veľa spôsobov riešenia a toto platí aj v tomto prípade. My si tu ukážeme „formálne“ riešenie pomocou rovníc.

Takže nech je rýchlosť Jerguša v_J, rýchlosť Kati v_K, vzdialenosť medzi lampou a stromom l_1, vzdialenosť medzi stromom a miestom, kde Jerguš dobehne Kaťu l_2 a hľadaný čas bude t. Pre oboch bude čas rovnaký, takže

$$t = t,$$

$$\frac{l_1 + l_2}{v_J} = \frac{l_2}{v_K}, \tag{1}$$

Okrem tejto rovnice však potrebujeme ešte nejakú ďalšiu informáciu. Všimnime si, že úsek medzi lampou a stromom prešla Kaťa za $t_1 = 18\,\mathrm{s}$, no Jerguš iba za $t_2 = 12\,\mathrm{s}$. Obaja ale prešli rovnakú vzdialenosť, teda

$$\begin{aligned} l_1 &= l_1, \\ v_K \cdot t_1 &= v_J \cdot t_2, \end{aligned}$$

z čoho už ľahko dostávame

$$v_K = \frac{2}{3} v_J, \tag{2}$$

Toto neznamená nič iné, než to, že Kaťa ide 2/3 rýchlosťou Jerguša. Keď to dosadíme do rovnice (1), dostávame

$$\begin{aligned} \frac{l_1 + l_2}{v_J} &= \frac{3l_2}{2v_J}, \\ l_2 &= 2l_1, \end{aligned}$$

Teda vzdialenosť, ktorú musí ešte Jerguš prejsť, je dvojnásobkom vzdialenosti medzi lampou a stromom, ktorá mu trvala 12 s. Preto mu to bude trvať ešte ďalších

$$t = 24\,\mathrm{s},$$

V riešeniach ste často do času zarátavali aj čas medzi lampou a stromom, no zadanie sa vás pýtalo, koľko mu to *ešte* bude trvať, keď už bol pri strome. Do budúcnosti: čítajte s porozumením a odpovedajte na to, na čo sa vás pýtajú.

1.4 Les je hustý (opravoval Baklažán)

Baklažán minule počul pesničku Les je hustý od Horkýže Slíže . A nebol by to Baklažán, ak by mu nenapadla otázka: "Ako veľmi je hustý?". Nájdite vo svojom okolí nejaký les a čo najpresnejšie odhadnite, koľko stromov by sa nachádzalo v tomto lese, ak by mal rozlohu 1 kilometer štvorcový. Presnejšie, Baklažán za strom považuje niečo vyššie, ako ste vy.

Metóda odhadu. Najpresnejšie by samozrejme bolo zobrať nejaký kus lesa s rozlohou $1\,\mathrm{km}^2$ a spočítať na ňom všetky stromy. To sa ale nikomu nechce. Preto si to zjednodušíme.

Veľkú časť z vás napadlo zobrať si nejakú menšiu plochu, spočítať na nej stromy a potom predpokladať, že na iných, rovnako veľkých plochách bude približne rovnako veľa stromov. Ak na ploche S bolo n stromov, potom počet stromov na jednotkovej ploche $1\,\mathrm{km}^2$ určíme z trojčlenky

$$\begin{aligned} &S \ldots\ldots\ldots\ldots n \,\text{stromov} \\ &1\,\mathrm{km}^2 \ldots\ldots\ldots\ldots n_1 \,\text{stromov} \end{aligned}$$

$$n_1 \approx n \frac{1\,\mathrm{km}^2}{S}$$

Keďže stromy nerasú úplne rovnomerne, musí byť táto rovnica iba priližná. Čím väčšiu plochu si vyberieme, tým presnejší bude náš odhad, ale aj tým viac budeme mať roboty.

Pri väčšine fyzikálnych experimentov sa odporúča kvôli zvýšeniu presnosti urobiť viac meraní a namerané hodnoty spriemerovať. V našom prípade ale nastáva zaujímavý jav:

Predstavme si, že by sme urobili jedno meranie na ploche $100\,\mathrm{m}^2$ a napočítali by sme 24 stromov. Náš odhad počtu stromov na štvorcovom kilometri by teda bol

$$24\frac{1\,\mathrm{km}^2}{100\,\mathrm{m}^2} = 24\frac{1\,000\,000\,\mathrm{m}^2}{100\,\mathrm{m}^2} = 240\,000.$$

Potom by prišiel niekto iný a tú istú plochu by si rozdelil na desať menších, každú s obsahom $10\,\mathrm{m}^2$ a urobil by merania na nich. Nech by si to rozdelil akokoľvek, dokopy by musel napočítať tých istých 24 stromov, teda v priemere na jednu oblasť by narátal $\frac{24}{10} = 2{,}4$ stromu. Jeho odhad na počtu stromov na kilometri štvorcovom by teda bol

$$2{,}4\frac{1\,\mathrm{km}^2}{10\,\mathrm{m}^2} = 2{,}4\frac{1\,000\,000\,\mathrm{m}^2}{10\,\mathrm{m}^2} = 240\,000\,\text{stromov}.$$

Čo sa týka presnosti, je teda jedno, či urobíme x meraní a spriemerujeme ich, alebo jedno meranie na x-krát väčšej ploche. Urobiť viac meraní má ale jednu výhodu. Z toho, ako sa namerané hodnoty medzi jednotlivými meraniami líšia, totiž vieme odhadnúť, aké presné bolo naše meranie.

Je ale dôležité, aby plocha, na ktorej robíme jedno meranie, nebola príliš malá. Ak by sme totiž merali na miniatúrnej ploche, napríklad 1×1 meter, už počas výberu miesta by sme vedeli, koľko stromov napočítame. Mohli by sme tieto miesta vyberať tak, aby na nich nerástol žiaden strom. Počet nula stromov na $1\,\mathrm{km}^2$ sa bude ale oproti skutočnej hustote lesa veľmi líšiť. Preto pre príliš malé plochy nebude platiť trojčlenka použitá vyššie a náš odhad bude veľmi nepresný.

Iná zaujímavá metóda je merať vzdialenosti medzi susednými stromami a potom vypočítať, koľko stromov by bolo na kilometri štvorcovom, ak by boli usporiadané v štvorcovej sieti s takýmito rozostupmi. Keďže ale vo väčšine lesov stromy nie sú v štvorcovej sieti, ide len o hrubý odhad.

Realizácia. A teraz hor sa do experimentovania. Doma som si pripravil štyri kusy špagátu, každý z nich dlhý 10 metrov plus kúsok na každom konci, aby som ich mal za čo priväzovať. V lese som si pomocou štyroch kolíkov[1] a týchto štyroch špagátov vyznačil štvorec $10 \times 10\,\mathrm{m}$. Aby bol môj štvorec čo najpresnejší, pri jeho vyznačení som si kontroloval smery jednotlivých strán pomocou kompasu. Nebolo tu ale treba nejakú veľkú presnosť, aj keby som vyznačil kosoštvorec s vnútornými uhlami $105°$ a $75°$ (teda by som sa od štvorcového tvaru odchýlil až o 15 stupňov), jeho obsah by bol ani nie o $4\,\%$ menší, než obsah štvorca $10 \times 10\,\mathrm{m}$, čo je pri takomto hrubom odhade zanedbateľná odchýlka. Vnútri tohto štvorca som spočítal všetky stromy. Tento postup som zopakoval 4 krát, s takýmito výsledkami:

číslo merania	1	2	3	4	priemer
počet stromov	6	9	7	3	6,25

[1] Kolíky som si vyrobil priamo v lese – nebudem predsa nosiť drevo do lesa.

V priemere som teda na štvorci s plochou $S = 10\,\mathrm{m} \cdot 10\,\mathrm{m} = 100\,\mathrm{m}^2$ napočítal 6,25 stromu, teda na kilometri štvorcovom môjho lesa by podľa toho malo byť

$$6{,}25\frac{1\,\mathrm{km}^2}{100\,\mathrm{m}^2} = 6{,}25\frac{1\,000\,000\,\mathrm{m}^2}{100\,\mathrm{m}^2} = 62\,500\,\text{stromov}.$$

Vidíme ale, že počty stromov na jednotlivých štvorcoch sa dosť líšili, teda je kľudne možné, že skutočný priemer je napríklad 4,5, alebo aj 8, teda na jednom kilometri štvorcovom je možno len 45 000 stromov, alebo až 80 000 stromov. Je ale dosť nepravdepodobné, že by ich tam bolo menej ako 30 000, alebo viac ako 90 000.

Presnosť. Aby sme tu iba neteoretizovali o presnosti, špeciálne kvôli vám sme vyrobili simuláciu lesa, v ktorej sme otestovali presnosť vašich metód (ak to bolo možné). Najpresnejšiu metódu mal podľa našej simulácie Juraj Vasek, od skutočnej hodnoty sa v simulácii odchyľovala v priemere o 11%.

1.5 Vážená zelenina (opravovali Silvia a Enka, vzorák Žabka)

Jarka vážila svoju obľúbenú zeleninu zo záhradky. Nik nevie, ako sa jej to podarilo, ale každá zelenina rovnakého druhu je rovnako ťažká, kým o rôznych druhoch to neplatí. Teda ľubovoľné dve mrkvy sú rovnako ťažké, kým mrkva a paradajka určite nie sú.

a) Vypočítajte hustotu kockatého minimelónu, ktorý váži 5 gigaton a má hranu 42 pikometrov.

b) Po vážení zvyšnej zeleniny zistila dve veci. Tri mrkvy, tri petržleny a tri kaleráby vážia o pol kilogramu menej než 4 paradajky. Paradajka, sedem petržlenov, sedem kalerábov a sedem mrkiev vážia spolu $2{,}5\,\mathrm{kg}$.

   Koľko bude vážiť spolu Jarkina mrkva, kaleráb a petržlen?

Najskôr si zopakujme zopár užitočných matematických rovností (honosne povedané identít), ktoré sa vám zídu pri riešení tejto úlohy:

$$\begin{aligned} a^b \cdot a^c &= a^{b+c}, \\ (a \cdot b)^c &= a^c \cdot b^c, \\ \left(a^b\right)^c &= a^{b \cdot c}, \\ \frac{a^b}{a^c} &= a^{b-c}. \end{aligned}$$

Podúloha a) Úloha od nás chcela, aby sme zistili hustotu kockatého minimelónu. Ako iste viete, hustota telesa sa označuje gréckym písmenom ρ (rhó) a vyjadruje podiel hmotnosti a objemu telesa. Hovorí nám teda, že ak sa teleso skladá z nejakého materiálu, koľko váži jeden m^3 tohoto materiálu. Určite vás teda neprekvapí, že hustota telesa (materiálu z ktorého je toto teleso tvorené) sa vypočíta ako

$$\rho = \frac{m}{V},$$

kde m označuje hmotnosť a V objem daného telesa. Z jednotkovej analýzy by nám aj malo byť jasné, že jednotkou hustoty je $\mathrm{kg/m^3}$.

Zvyšok úlohy je už len mechanické rátanie. Vieme, že hmotnosť minimelónu je 5 gigaton. To nie je veľmi pekný zápis, keďže my chceme mať ako jednotku hmotnosti kilogram. Najskôr sa popasujme s predponou *giga*. Ak sa pozrieme do tabuľky v študijnom texte, rýchlo zistíme, že giga je skratka pre 10^9. Môžeme si teda zapísať, že melón váži 5 000 000 000 ton, je však krajšie to zapisovať pomocou mocniny 10, takže $5 \cdot 10^9$ ton. Naviac vieme, že 1 tona je $1000 = 10^3$ kilogramov, takže dostaneme, že $m = 5 \cdot 10^9 \cdot 10^3\,\mathrm{kg}$. No, a ak násobím dve mocniny s rovnakým základom (v tomto prípade 10), stačí nám sčítať ich exponenty, teda $m = 5 \cdot 10^{9+3}\,\mathrm{kg} = 5 \cdot 10^{12}\,\mathrm{kg}$.

Druhá veličina je objem. Čo máme však zadané, je dĺžka strany d, našťastie je však melón tvaru kocky, preto $V = d^3$. Vyjadrime si však najskôr $d = 42\,\mathrm{pm}$ do pekného tvaru. Chceme sa zbaviť predpony *piko*. Opäť pohľadom do tabuľky zistíme, že je to 10^{-12}, teda $d = 42 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{m}$. Teraz potrebujeme zrátať objem $d^3 = (42 \cdot 10^{-12})^3\,\mathrm{m}^3$. Vieme, že násobok umocnený na číslo je rovnaký ako vynásobenie jednotlivých činiteľov umocnených na dané číslo. Teda $V = d^3 = 42^3 \cdot (10^{-12})^3\,\mathrm{m}^3$. No a umocnenie mocniny je vynásobenie starého exponenta novým, takže $V = 42^3 \cdot 10^{-36}\,\mathrm{m}^3$.

Teraz už poznáme všetko, čo potrebujeme na vyrátanie hustoty – poznáme hmotnosť aj objem. Stačí ich vydeliť. Teda

$$\rho = \frac{5 \cdot 10^{12}\,\mathrm{kg}}{42^3 \cdot 10^{-36}\,\mathrm{m}^3} = \frac{5}{42^3}\frac{10^9}{10^{-36}}\,\mathrm{kg/m^3} = \frac{5}{42^3}\cdot 10^{12-(-36)}\,\mathrm{kg/m^3} = \frac{5}{42^3}\cdot 10^{12+36}\,\mathrm{kg/m^3} = \frac{5}{42^3}\cdot 10^{48}\,\mathrm{kg/m^3}\ .$$

A hotovo. Inak je to doooosť hustý melón :)

Podúloha b) Toto bola úloha už o trošku ťažšia (a o trošku menej fyzikálna), dalo sa to však zvládnuť ak ste si to nepomotali. Tak poďme na to pohlave. Vyjadrime si hmotnosť mrkvy ako $m\,\mathrm{kg}$, hmotnosť petržlenu ako $p\,\mathrm{kg}$, hmotnosť kalerábu ako $k\,\mathrm{kg}$ a **hmotnosť paradajky si vyjadríme ako** $t\,\mathrm{kg}$ (p sme použili na petržlen, tak ju berme ako *tomato*).

Pozorne si teraz prečítajme čo nám hovorí zadanie. „Tri mrkvy, tri petržleny a tri kaleráby vážia o pol kilogramu menej ako štyri paradajky.“ Toto si pomocou našich písmeniek vieme zapísať ako rovnicu $(3m + 3p + 3k + 0{,}5)\,\mathrm{kg} = 4t\,\mathrm{kg}$. Všimnite si prítomné jednotky, keďže je to rovnica hmotností. Keďže ja som však lenivý, už to tam viac nebudem písať, len ticho predpokladám, že to všetci vieme.

Druhá veta hovorí, že: „Paradajka, sedem petržlenov, sedem kalerábov a sedem mrkiev váži spolu 2,5 kg“. Z toho dostávame rovnicu $t + 7p + 7k + 7m = 2{,}5$. Máme teda dve rovnice, z ktorých chceme zistiť, čomu sa rovná $p + k + m$. Pre prehľadnosť, označme si tento súčet ako $v = p + k + m$.

Urobme zopár úprav:

$$\begin{aligned} 3m + 3p + 3k + 0{,}5 &= 3(m + p + k) + 0{,}5 = 3v + 0{,}5 = 4t\ , \\ t + 7p + 7k + 7m &= t + 7(p + k + m) = t + 7v = 2{,}5 \end{aligned}$$

Toto je už oveľa lepšie, máme totiž dve rovnice a len dve neznáme premenné (t a v). Poďme vyrátať v. Na to sa však potrebujeme zbaviť premennej t. Z druhej rovnice ($t + 7v = 2{,}5$) však vyplýva, že $t = 2{,}5 - 7v$. No a čo nám bráni vložiť toto vyjadrenie namiesto premennej t v prvej rovnici ($3v + 0{,}5 = 4t$)? Správne, nič.

$$\begin{aligned} 3v + 0{,}5 &= 4(2{,}5 - 7v)\ , \\ 3v + 0{,}5 &= 10 - 28v \end{aligned}$$

A to sme už skoro vyhrali. Už len stačí správne poprehadzovať strany rovnice a osamostatniť premennú v.

Najskôr prehodím $28v$ a 0,5 na druhú stranu, pričom zmením znamienko, potom príslušné členy sčítam a nakoniec vyjadrím v:

$$\begin{aligned} 3v + 28v &= 10 - 0{,}5\ , \\ 31v &= 9{,}5\ , \\ v &= \frac{9{,}5}{31} = \frac{19}{62}\ . \end{aligned}$$

A keďže premenná v je tá, ktorú sme sa snažili vyjadriť, máme hotovo. Výsledok bude 19/62 kg.

1.6 Jednotky (opravovala Čajka, vzorák Jarka)

I. Zrýchlenie a je definované ako zmena rýchlosti za čas $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$. Sila ako súčin hmotnosti a zrýchlenia $F = ma$ alebo zmena hybnosti za čas $F = \frac{\Delta p}{\Delta t}$. Tlak, ako sme už spomínali, je podiel sily a plochy, na ktorú pôsobí $p = \frac{F}{S}$. Práca je daná ako súčin dráhy a sily $W = F \cdot s$, energia je rovná vykonanej práci a výkon je vykonaná práca za čas $P = \frac{W}{t}$.

a) Vyjadrite na základe týchto vedomostí jednotky sily, gravitačného zrýchlenia, hybnosti, práce, tlaku, energie a výkonu pomocou jednotiek SI.

b) Slávny gravitačný zákon dnes zapisujeme ako $F = G\frac{mM}{r^2}$, kde m, M sú hmotnosti, r vzdialenosť a G je konštanta. Aký rozmer má konštanta G?

II. Andrej, Baklažán, Cibulka a Dušan rátali príklad, ktorého výsledkom mala byť dĺžka. Používali pri tom dĺžky l_1, l_2, rýchlosti v_1, v_2, časy t_1, t_2 a zrýchlenia a_1, a_2, pričom nemuseli všetky použiť.

Vyšli im takéto výsledky:

A) $2\sqrt{\frac{\frac{l_1 l_2}{l_1 + l_2}}{a_1}\frac{v_1 v_2}{v_1 + v_2}}$

B) $8\frac{a_1 t_1 a_2 t_2}{a_1 + a_2}$

C) $15(a_1 + v_1 + l_1 - a_2 - v_2 - l_2)v_1 t_2$

D) $l_1 \cdot 2^{v_1/v_2}$

Čí výsledok podľa rozmerovej analýzy musí byť zlý?

I. a) Jednotku sily vypočítame tak, že do vzorca na výpočet sily dosadíme jednotky:

$$[F] = [m] \cdot [a] = \frac{\mathrm{kg \cdot m}}{\mathrm{s}^2}$$

Gravitačné zrýchlenie je druh zrýchlenia, preto jeho jednotku zistíme dosadením jednotiek do vzorca pre zrýchlenie:

$$[g] = [a] = \frac{[v]}{[t]} = \frac{\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{\mathrm{s}} = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Hybnosť sa nachádza vo vzorci pre výpočet sily:

$$F = \frac{p}{t}$$

Najprv si zo vzorca vyjadríme hybnosť:

$$p = F \cdot t$$

A znova uz len dosadíme jednotky:

$$[p] = [F] \cdot [t] = \mathrm{kg} \cdot \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot \mathrm{s} = \frac{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Do vzorca na výpočet práce dosadíme jednotky:

$$[W] = [F] \cdot [s] = \mathrm{kg} \cdot \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot \mathrm{m} = \frac{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}$$

Do vzorca na výpočet tlaku dosadíme jednotky:

$$[p] = \frac{[F]}{[S]} = \frac{\mathrm{kg} \cdot \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{\mathrm{m}^2} = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^2}$$

Ako je napísané v zadaní, energia je rovná vykonanej práci, a preto má aj rovnakú jednotku:

$$[E] = [W] = \mathrm{kg} \cdot \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}$$

Do vzorca na výpočet výkonu dosadíme jednotky:

$$[P] = \frac{[W]}{[t]} = \frac{\mathrm{kg} \cdot \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}}{\mathrm{s}} = \frac{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^3}$$

b) Najprv zo zadaného vzorca vyjadríme gravitačnú konštantu G:

$$F = \frac{G \cdot m \cdot M}{r^2}, \tag{3}$$

$$G = \frac{F \cdot r^2}{m \cdot M}, \tag{4}$$

Dosadíme jednotky veličín:

$$[G] = \frac{[F] \cdot [r]^2}{[m] \cdot [M]} = \frac{\mathrm{kg} \cdot \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot \mathrm{m}^2}{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{kg}} = \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}^2}$$

II. A) Andrejov výsledok je:

$$2 \cdot \sqrt{\frac{\frac{l_1 \cdot l_2}{(l_1 + l_2)}}{a_1}} \cdot \frac{v_1 \cdot v_2}{(v_1 + v_2)}$$

Súčet $l_1 + l_2$ bude opäť nejaká dĺžka l, a podobne aj súčet $v_1 + v_2$ bude nejaká rýchlosť v. Číslo 2 na začiatku výrazu je bezrozmerné (nemá jednotky), preto ho môžeme vynechať. Do vypočítaného výrazu dosadíme jednotky:

$$2 \cdot \sqrt{\frac{[l_1] \cdot [l_2]}{\frac{[l]}{[a_1]}} \cdot \frac{[v_1] \cdot [v_2]}{[v]}} = \sqrt{\frac{\mathrm{m} \cdot \mathrm{m}}{\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{m/s^2}}} \cdot \frac{\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}}$$

Výsledná jednotka by mali byť metre:

$$\mathrm{m} = \sqrt{\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{m/s^2}}} \cdot \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}, \mathrm{m} = \sqrt{\mathrm{s}^2} \cdot \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}, \mathrm{m} = \frac{\mathrm{s} \ \cdot \mathrm{m}}{\mathrm{s}}, \mathrm{m} = \mathrm{m}.$$

Andrejov výsledok je na základe rozmerovej analýzy dobrý.

B) Baklažánov výsledok je:

$$\frac{8 \cdot a_1 \cdot t_1 \cdot a_2 \cdot t_2}{a_1 + a_2}$$

Súčet $a_1 + a_2$ bude nejaké zrýchlenie a. Číslo 8 na začiatku výrazu je bezrozmerné, preto ho môžeme vynechať. Do vypočítaného výrazu dosadíme jednotky:

$$\frac{[a_1] \cdot [t_1] \cdot [a_2] \cdot [t_2]}{[a]} = \frac{\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot \mathrm{s} \cdot \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot \mathrm{s}}{\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}$$

Výsledná jednotka by mali byť metre:

$$\mathrm{m} = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot \mathrm{s} \ \cdot \mathrm{s}, \tag{5}$$

$$\mathrm{m} = \mathrm{m}. \tag{6}$$

Baklažánov výsledok je na základe rozmerovej analýzy dobrý.

C) Cibulkov výsledok je:

$$15 \cdot (a_1 + v_1 + l_1 - a_2 - v_2 - l_2) \cdot v_1 \cdot t_2$$

V zátvorke je súčet zrýchlenia, rýchlosti a dĺžky. Každá z týchto veličín má inú jednotku, a preto ich nemôžme sčítať/odčítať. Tento výsledok na základe rozmerovej analýzy je zlý.

D) Dušanov výsledok je:

$$l_1 \cdot 2^{v_1/v_2}$$

Podiel $\frac{v_1}{v_2}$ je bezrozmerný, pretože $\frac{\mathrm{m/s}}{\mathrm{m/s}} = 1$. Tým pádom Dušanov výsledok je l_1 vynásobené nejakým číslom, a preto výsledok bude určite v metroch. Dušanov výsledok je na základe rozmerovej analýzy dobrý.