Fyzikálny korešpondenčný seminár
7. ročník, 2013/2014

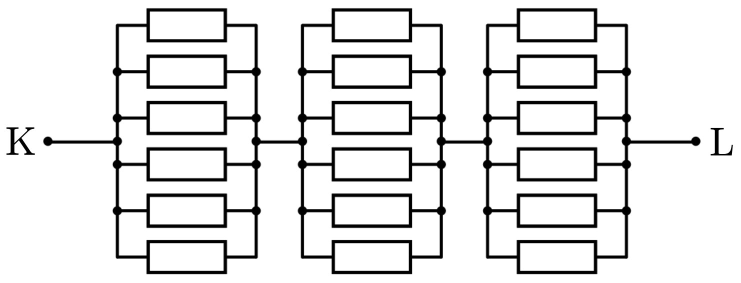
UFO, KTFDF FMFI UK, Mlynská dolina, 84248 Bratislava
e-mail: otazky@fks.sk web: http://ufo.fks.sk

Vzorové riešenia 2. kola zimnej časti 2013/2014

2.1 Chobotníky na schôdzke (opravoval Maťo G.)

Chobotník Luxusko išiel na obchodné jednanie s chobotníkom Kaktuskom ohľadom pristrihnutia vrchného vlasu. Ako slušnosť káže, podali si pri predstavovaní choboty pomocou pomocných chápadiel. Choboty chobotníkov aj pomocné chápadlá majú odpor R. Luxuskove aj Kaktuskove choboty sa dotýkajú vodivej obruče. Aký je odpor medzi vrchným vlasom Luxuska a Kaktuska?

Aha, ďalšie choboty! Skúsme použiť to, čo sme sa naučili v 1. sérii[1]. Základnou myšlienkou príkladu je fakt, že každú vodivú obruč môžeme zmenšiť na veľmi malú veľkosť, čím z nej vytvoríme uzol. Môžeme to urobiť, pretože obruč je dokonale vodivá, a teda nemá žiadny odpor, čím nemá ako vznikať na nej úbytok napätia[2] a obruč vieme nahradiť kusom drôtu, na ktorom tiež nebude vznikať žiadny úbytok napätia, a preto nezaznamenáme žiadnu zmenu. Takýto drôt však môže byť taký malý, že ho budeme považovať za bod – uzol. Jednoducho povedané, obruče dáme preč a chápadlá spojíme do uzlov tam, kde boli obruče, čím získame zapojenie ako na obrázku.



Obr. 1: Schéma zapojenia

Ale však toto vyzerá ako paralelné zapojenie! A fakt – sú to tri paralelné zapojenia za sebou (do série). Každé paralelné zapojenie má odpor

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R} = \frac{6}{R},$$

z čoho $R_1 = R/6$. Takéto odpory sú však tri za sebou, takže celkový odpor Luxuska a Kaktuska bude

$$R_{\mathrm{L-K}} = R_1 + R_1 + R_1 = 3 \cdot R/6 = R/2,$$

[1] Ak si to chcete ešte raz pozrieť, kliknite na http://ufo.fks.sk/archiv/2013_14/7vzorakyZima1.pdf

[2] Podľa Ohmovho zákona $U = R \cdot I$, pre $R = 0$ je nutne $U = 0$.

Hodnotenie Za nevysvetlenie, prečo môžeme zmenšiť obruč do bodu sa strhávali 1-2 body, niektorí ste zle pochopili úlohu a počítali ste len odpor R_1, čím ste prišli taktiež o 1-2 body. Čítajte s porozumením! 2 body sa strhli aj za nedostatočný slovný opis. Tí, ktorí od seba opisovali nedostali viac ako 1 bod a takisto aj tí, ktorí nedospeli k správnemu výsledku pretože nepoužívali správne vzťahy dostali veľmi málo bodov.

2.2 Odšťavovač (opravoval Syslík)

Čajka si povedala, že keď už je silná žena, tak si postaví silný hydraulický lis na pomarančový džús. A rovno kúpila dva a takto ich prepojila: Akou silou F pučí lis pomaranč piestom S_4, ak na piest S_1 dá Čajka závažie s hmotnosťou M? Piesty S_2 a S_3 sú pevne spojené. Plochy piestov sú $S_1 = 100\,\mathrm{cm}^2$, $S_2 = 200\,\mathrm{cm}^2$, $S_3 = 300\,\mathrm{cm}^2$, $S_4 = 400\,\mathrm{cm}^2$ a závažie váži $M = 100\,\mathrm{kg}$, $g = 10\,\mathrm{N/kg}$. Predpokladajte, že z lisu nevytečie žiadna kvapalina.

Siedmimi bodmi oceníme číselný výsledok, ďalšie dva môžete získať za všeobecné vyjadrenie F.

Najskôr uvádzame krátke riešenie, so sedliackym rozumom. Potom si niektoré časti vysvetlíme lepšie.

Na závažie pôsobí gravitačná sila veľká $F_g = Mg$. Takou veľkou silou pôsobí závažie na plochu S_1, a tá potom pôsobí tiež rovnakou silou $F_1 = F_g$ na kvapalinu v spodnej nádobe lisu. Tým vznikne v kvapaline tlak

$$p_A = \frac{F_1}{S_1} = \frac{Mg}{S_1}\,,$$

O túto hodnotu sa zvýši tlak v celom objeme kvapaliny, teda aj na druhom konci nádoby. Na piest S_2 bude tento tlak pôsobiť silou

$$F_2 = p_A S_2 = Mg\frac{S_2}{S_1}\,,$$

Keďže piesty S_2 a S_3 sú spojené pevne, na kvapalinu v hornej nádobe bude piest pôsobiť silou $F_3 = F_2$. To v hornej kvapaline vytvorí tlak

$$p_B = \frac{F_3}{S_3} = \frac{S_2}{S_1 \cdot S_3} Mg\,,$$

Tento tlak znova pôsobí v celej kvapaline, teda aj na piest S_4 silou

$$F_4 = p_B S_4 = \frac{S_2 \cdot S_4}{S_1 \cdot S_3} Mg\,,$$

Nakoniec zo zákona akcie a reakcie vieme povedať, že rovnako veľkou silou potom táto plocha pôsobí na pomaranč. Zostáva nám ju už len vyčísliť:

$$F = \frac{S_2 \cdot S_4}{S_1 \cdot S_3} Mg = \frac{200\,\mathrm{cm}^2 \cdot 400\,\mathrm{cm}^2}{100\,\mathrm{cm}^2 \cdot 300\,\mathrm{cm}^2} \cdot 100\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} \doteq 2\,670\,\mathrm{N}\,,$$

Tak a teraz sa na to poďme pozrieť podrobnejšie. Ako zmeriame silu? No predsa silomerom! Takže na chvíľu odložme pomaranč a miesto neho na koniec lisu vložme pružinku. Tá sa stlačí, čo vyvolá v pružinke silu pôsobiacu proti ďalšiemu stláčaniu. Ak bude pružinka dostatočne stlačená, táto sila bude rovnako veľká ako sila F_4 a sústava lisu a pružinky sa ustáli. No ale pôsobenie nejakých síl, to sú predsa Newtonove zákony! A rovno prvý z nich nám hovorí, že na to, aby bolo niečo v pokoji, výsledná sila, ktorá na to niečo pôsobí, musí byť nulová.

Napríklad také závažie. V jednom smere naň pôsobí gravitačná sila. Aby teda závažie zostalo v pokoji, piest S_1 naň musí pôsobiť silou presne opačnou ako gravitačná. Zo zákona akcie a reakcie potom ale musí závažie pôsobiť na piest silou rovnako veľkou, ale opačne orientovanou. Takýmto mechanizmom sa teda gravitačná sila závažia preniesla na plochu piestu.

Piest však tiež stojí. Teda kvapalina musí zdola pôsobiť na piest tiež silou F_g a zo zákona akcie a reakcie musí aj on pôsobiť na ňu. Podobným spôsobom sa teda táto sila „prenesie" až na pružinku, ktorá je stláčná silou, ktorú označme ako „pučiacu". Je však táto sila rovná sile, ktorou posledný piest pôsobí na pomaranč hneď po tom, ako ho tam vložíme?

Nie. Pomaranč totiž nie je dostatočne pevná podložka, ktorá by na túto silu dokázala reagovať a pôsobiť na piest opačnou silou rovnakej veľkosti. Sily pôsobiace jedným smerom teda budú mať prevahu a celá sústava začne zrýchľovať smerom k pomaranču, teda začne ho pučiť. Čím ďalej, tým viac sily bude treba na pučenie pomaranču, až bude táto sila taká veľká, že sústava sa ustáli. Posledné zvyšky pomaranča budú potom stlačené tak, že na piest budú pôsobiť tak silno, aby všetko stálo.

Hodnotenie Za náčrt myšlienky riešenia bolo možné získať 1-2 body. Ak bolo riešnie z väčšej časti správne, dostali ste 7 bodov, z ktorých sa strhávalo za chyby podľa závažnosti. Posledné 1-2 body sa dali získať za všeobecné vyjadrenie riešenia.

2.3 Cereálie sajú (opravovala Enka)

Mišo raňajkuje cereálie a vždy ho zaujalo, že keď nasype cereálie do mlieka, po čase nasajú mlieko a ponoria sa. Pozrel sa na svoje raňajky a odhadol, že obsahujú $N = 70$ guličiek s polomerom $R = 0{,}25\,\mathrm{cm}$. Keď ich nasype do mlieka suché, plávajú do polovice ponorené v mlieku s hustotou $\rho = 1035\,\mathrm{kg/m^3}$. Aký objem mlieka nasajú jeho raňajky, kým sa všetky guličky ponoria?

Základ tejto úlohy spočíva v uvedomení si, že pre Mišove cereálie ponorené do mlieka platí Archimedov zákon v znení: „Teleso ponorené do kvapaliny je nadľahčované vztlakovou silou, ktorej veľkosť sa rovná tiaži kvapaliny s rovnakým objemom, ako je objem ponorenej časti telesa." Poďme spolu uviesť tento zákon do praxe.

Suché cereálie majú ponorenú len polovicu svojho objemu (celkový objem cereálií si označíme ako V, ktorý si zrátame neskôr), takže na ne pôsobí vztlaková sila veľkosti

$$F_{\mathrm{vz1}} = \frac{V}{2}\rho g\,,$$

Keďže si cereálie na hladine len v pokoji plávajú, tak vztlakovú silu F_{vz1} musí vyrovnať tiažová sila cereálií, ktorá má veľkosť $F_{\mathrm{c}} = m_{\mathrm{c}}g$, pričom m_{c} je hmotnosť suchých cereálií. Teda musí platiť

$$\frac{V}{2}\rho g = m_{\mathrm{c}}g\,,$$

Ak však cereálie nasajú mlieko a ponoria sa, tak vztlaková sila bude mať veľkosť $F_{\mathrm{vz2}} = V\rho g$. Teraz však túto vztlakovú silu vyrovnáva nie len tiaž cereálií F_{c}, ale aj tiažová sila nasiaknutého mlieka veľkosti $F_\mathrm{m} = m_\mathrm{m} g = V_\mathrm{m}\rho g$. Označili sme m_m a V_m hmotnosť a objem mlieka, ktoré nasajú Miškove cereálie. Platí nám teda

$$F_\mathrm{vz2} = F_\mathrm{c} + F_\mathrm{m}\,,$$

$$V\rho g = m_\mathrm{c} g + V_\mathrm{m}\rho g\,,$$

Avšak tiažová sila nasatých cereálií môže byť aj väčšia ako vztlaková sila a vtedy budú cereálie klesať ku dnu. Preto rátame iba dolný odhad množstva nasatého mlieka, pri ktorom sa cereálie môžu potopiť. Na druhej strane všetky cereálie nenasávajú mlieko rovnako rýchlo a keď sa ponoria, tak pradepodobne budú nasávať aj naďalej. Preto náš výsledok nemusí byť úplne univerzálny, avšak vypočítame ním najmenší objem nasatého mlieka, pri ktrorom by sa cereálie mohli ponoriť.

Môžme sa obrátiť na vzťah, ktorý sme dostali pre suché cereálie. Za člen $m_\mathrm{c} g$ si môžeme dosadiť, čím dostaneme

$$V\rho g = \frac{V}{2}\rho g + V_\mathrm{m}\rho g\,,$$

$$V = \frac{V}{2} + V_\mathrm{m}\,,$$

$$\frac{V}{2} = V_\mathrm{m}\,,$$

Teraz nás delí už len krôčik od výsledku… Objem cereálií vyjadríme vzťahom pre objem gule:

$$V = N\cdot\frac{4}{3}\pi R^3 = 70\cdot\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot(0{,}25\,\mathrm{cm})^3 = 4{,}6\,\mathrm{cm}^3\,,$$

Objem nasiaknutého mlieka je polovica z objemu cerálií, teda číselne $2{,}3\,\mathrm{cm}^3$.

Hodnotenie Ak ste mali dobre vyrátaný objem jednej guľôčky cereálie, tak ste dostali 3 body. Ak ste mali v riešení spomenuté, že ponorená guľôčka musí mať spoň takú veľkú hustotu, ako je hustota mlieka, v kotrom je guľôčka ponorená, dostli ste ďalší 1 bod. Za správne odvodenie vzťahu medzi objemom guľôčky a objemu nasatého mlieka ste mohli dostať ďalšie 4 body. Posledný 1 bod získali tí, ktorí správne poupravovali všetky výrazy a výsledok dotiahli do konca.

2.4 Dýchanie 24 hodín denne (opravoval Jerguš)

Kaťu zaujíma, koľko vzduchu prejde vašim nosom, ak ním dýchate, za 24 hodín. Namerajte túto hodnotu, ak predpokladáte, že celý deň dýchate tak, ako dýchate v pokoji.

Niektorí z vás v tomto príklade vypočítali, koľko vzduchu prejde nosom, no použili hodnoty z internetu, v zadaní sa však jasne píše „namerajte“, teda hor sa do merania! Najprv si však musíme postaviť aparatúru, naša pozostáva z prázdneho sáčku a vedra vody. Princíp merania funguje nasledovne, najprv vydýchneme do prázdneho sáčku vzduch a uzavrieme ho. Následne tento sáčok ponoríme do hrnca s vodou, z ktorého sa vyleje voda do väčšieho hrnca. Keď zmeriame objem tejto vody zistíme aj objem vzduchu, ktorý bol v sáčku.

Nesmieme však zabudnúť, že musíme zmerať aj ako dlho trvá priemerný cyklus dýchania (nádych + výdych), pre spresnenie výsledku sme preto vždy zmerali 10 takýchto cyklov. Výdych sme vždy vydýchli do sáčku a nadýchli sa mimo sáčku. Keďže vieme, že objem vzduchu, ktorý vdýchneme, musíme aj vydýchnuť, tak objem, ktorý bude v sáčku, vynásobený dvomi je celkový objem, ktorý nám prešiel cez nos.

Meranie	Objem [ℓ]	Čas [s]
1. meranie	0,35	29
2. meranie	0,32	25
3. neranie	0,31	25
4. meranie	0,34	27
5. meranie	0,32	26
priemer	0,32	26

Teraz, keď vieme, koľko trvá priemerný výdych a aj jeho objem, môžeme vypočítať, koľko vzduchu vydýchneme za sekundu. Podľa vzorca pre objemnový prietok

$$Q = \frac{V_p}{t_p}$$

zistíme prietok vzduchu cez nos. Následne, keď vynásobíme túto hodnotu počtom sekúnd v jednom dni, tj. 86 400 s, tak získame objem vydýchnutho vzduchu za jeden deň. Ak však chceme celkovú hodnotu aj vydýchnutého aj vdýchnutého vzduchu, toto číslo ešte musíme prenásobiť dvomi. Po dosadní všetkých čísel dostávame výsledok, po zaokrúhlení 21 500 ℓ, to je pre predstavu zhruba 21469 1-litrových krabíc od mlieka.

Hodnotenie 2 body – Uskutočnených meraní bolo viac ako jedno.
2 body – Výpočet, koľko objemu vzduchu za nejaký čas prejde nosom. Je jedno akým spôsobom, len musí byť aspoň čiastočne zmysluplný.
1 bod – Algebraické riešenie, do ktorého sú na konci dosadené hodnoty.
1 bod – Meranie času pri viacerých výdychoch, takže sa odchýlka v čase na nádych zmenší.
1 bod – Nejaká pekná tabuľka, graf.
1 bod – Nezabudnutie prenásobenia dvomi na konci.
2 body – Originalita riešenia. :)

2.5 Vyjadri to tetovaním! (opravovala Maja)

Andrej, Tina a Syseľ si nechali vytetovať svoju obľúbenú rovnicu na hruď. Ľaľa, tu sú aj s ich obľúbenými neznámymi:

a) Neznáma a a $\quad s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$

t) Neznáma t a $\quad m_1c_1(t_1 - t) = m_2c_2(t - t_2) + m_2 l_T$

s) Neznáma s a $\quad \frac{as + b}{c + ds} = (7 + e)\frac{1}{7 + f}$

Teraz si chcú urobiť tetovania na chrbát, kde z rovníc bude vyjadrená ich obľúbená neznáma. Pomôžte im, ako vyjadriť tú ich neznámu, a napíšte im aj celý postup, aby vám uverili.

V tejto úlohe bolo dôležité správne upravovať rovnice. No ale s rovnicami si nemôžeme robiť, čo sa nám zachce! Existuje iba niekoľko úprav, ktoré nám zachovávajú rovnosť. Nazývajú sa ekvivalentné úpravy a sú to známe pričítanie a odčítanie ľubovoľného čísla z oboch strán rovnice a delenie a násobenie oboch strán ľubovoľným nenulovým číslom. Ekvivalentné sú aj nejaké ďalšie operácie, ale to zatiaľ potrebovať nebudeme. Ďalšia užitočná vec je roznásobovanie zátvoriek a vynímanie pred zátvorku. A to je v podstate skoro všetko, čo budeme na vyriešenie tejto úlohy potrebovať. Tak teda poďme na to :-)

a)

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \,,$$

Všetky výrazy, v ktorých sa nevyskytuje a presunieme na druhú stranu.

$$s - \mathbf{s_0} - \mathbf{v_0 t} = \frac{1}{2} a t^2 \,,$$

Celú rovnicu vynásobíme dvojkou.

$$(s - s_0 - v_0 t) \cdot \mathbf{2} = \frac{1}{\cancel{2}} a t^2 \cdot \cancel{2} \,,$$

A ešte vydelíme t^2, čím sa ho zbavíme na pravej strane.

$$2(s - s_0 - v_0 t) \cdot \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{t^2}} = a\cancel{t^2} \cdot \frac{\mathbf{1}}{\cancel{t^2}} \,,$$

$$a = \frac{2(s - s_0 - v_0 t)}{t^2} \,,$$

Celkom jednoduché, nie? V podstate sme iba všetko okrem a správne presunuli na druhú stranu rovnice.

b) Tu sa nám t vyskytuje na obidvoch stranách a ešte aj v zátvorkách. Najskôr ho potrebujeme z tých zátvoriek dostať. Jednoducho ich roznásobíme.

$$m_1 c_1 (t_1 - t) = m_2 c_2 (t - t_2) + m_2 l_T \,,$$

$$m_1 c_1 t_1 - m_1 c_1 t = m_2 c_2 t - m_2 c_2 t_2 + m_2 l_T \,,$$

Teraz by sa nám páčilo, aby sme všetky výrazy, v ktorých sa vyskytuje t, presunuli na jednu stranu.

$$-m_1 c_1 t - \mathbf{m_2 c_2 t} = -m_2 c_2 t_2 + m_2 l_T - \mathbf{m_1 c_1 t_1} \,,$$

Občas (napríklad teraz) sa pri úprave rovníc môže stať, že pred veľmi veľa vecami bude mínus. Nič nepokazíme, ak celú rovnicu prenásobíme -1. Tým sa zmenia znamienka všetkých výrazov v rovnici.

$$m_1 c_1 t + m_2 c_2 t = +m_2 c_2 t_2 - m_2 l_T + m_1 c_1 t_1 \,,$$

Na ľavej strane máme pri sebe dva výrazy, ktoré obsahujú t a dokážeme si ho vyňať.

$$t \left(m_1 c_1 + m_2 c_2 \right) = m_2 c_2 t_2 - m_2 l_T + m_1 c_1 t_1 \,,$$

Už sa iba zbavíme všetkého prebytočného okrem t na ľavej strane, podobne ako v úlohe a.

$$t \cdot \cancel{(m_1 c_1 + m_2 c_2)} \cdot \frac{\mathbf{1}}{\cancel{m_1 c_1 + m_2 c_2}} = \frac{m_2 c_2 t_2 - m_2 l_T + m_1 c_1 t_1}{\mathbf{m_1 c_1 + m_2 c_2}} \,,$$

$$t = \frac{m_2 c_2 t_2 - m_2 l_T + m_1 c_1 t_1}{m_1 c_1 + m_2 c_2} \,,$$

c) A posledná rovnica:

$$\frac{as+b}{c+ds} = (7+e)\cdot\frac{1}{7+f} = \frac{7+e}{7+f}\,,$$

Rovnicu vynásobíme oboma menovateľmi. Tým sa zbavíme zlomkov.

$$\begin{aligned}
\frac{as+b}{c+ds}\cdot(\mathbf{c}+\mathbf{ds})(\mathbf{7}+\mathbf{f}) &= \frac{7+e}{7+f}\cdot(\mathbf{c}+\mathbf{ds})(\mathbf{7}+\mathbf{f})\,,\\
\frac{as+b}{\cancel{c+ds}}\cdot\cancel{(c+ds)}(7+f) &= \frac{7+e}{\cancel{7+f}}\cdot(c+ds)\cancel{(7+f)}\,,
\end{aligned}$$

Teraz si zátvorky roznásobíme.

$$7as+asf+7b+bf = 7c+7ds+ec+eds\,,$$

Na ľavú stranu si prehodíme všetky výrazy, ktoré obsahujú premennú s.

$$\begin{aligned}
7as+asf+7b+bf\mathbf{-7b-bf-7ds-eds} &= 7c+7ds+ec+eds\mathbf{-7b-bf-7ds-eds}\,,\\
7as+asf+\cancel{7b}+\cancel{bf}-\cancel{7b}-\cancel{bf}-7ds-eds &= 7c+\cancel{7ds}+ec+\cancel{eds}-7b-bf-\cancel{7ds}-\cancel{eds}\,,\\
7as+asf-7ds-eds &= 7c+ec-7b-bf\,,
\end{aligned}$$

A teraz si už môžeme konečne vyňať s pred zátvorku a osamostatniť ho.

$$\begin{aligned}
s(7a+af-7d-ed) &= 7c+ec-7b-bf\,,\\
s &= \frac{7c+ec-7b-bf}{7a+af-7d-ed}\,,
\end{aligned}$$

Hodnotenie Za každú podúlohu ste mohli získať 3 body. K hodnoteniu jednotlivých podúloh - ak máte správny postup a správny výsledok v akokoľvek škaredom tvare, určite dostanete 3 body. Pokiaľ ste upravovali správne, ale máte postup (alebo výsledok) zle zapísaný, (napríklad ste zabudli napísať zátvorky, ale postupovali ste tak, ako keby bol nejaký výraz v zátvorke) strhnem Vám v závislosti od vážnosti chyby najviac 1 bod. To isté platí aj pokiaľ urobíte nejakú malú chybu, ale musí byť zjavné, že nie je myšlienková. Pokiaľ urobíte myšlienkovú chybu, v závislosti od závažnosti môžete, ale nemusíte dostať za úlohu nejaké body (výnimočne 2, skôr 1).

2.6 Rozumné kladky (opravovala Jarka)

Cez kladku máme prehodené lano, na ktorého koncoch sú oň uviazané dve závažia s hmotnosťami m a M. Teraz závažia pustíme a zaujíma nás, s akým zrýchlením bude zrýchľovať závažie s hmotnosťou M.

a) $a = \dfrac{M+m}{M-m}g$

b) $a = \dfrac{Mm}{M+m}g$

c) $a = \dfrac{1}{2}\dfrac{M-m}{M+m}g$

d) $a = \dfrac{1}{3}\dfrac{m}{M}g$

e) $a = (M+m)\left(\dfrac{1}{M}+\dfrac{1}{m}\right)g$

Ktoré z týchto výsledkov nemôžu byť dobre? Nezabudnite, že rozmer zrýchlenia a je rovnaký ako rozmer gravitačného zrýchlenia g.

1) **rozmerová analýza**
Na to, aby bola rovnica platná, musia mať hodnoty na oboch stranách rovnaké jednotky. Keďže zrýchlenie a a gravitačné zrýchlenie g majú rovnakú jednotku ($\mathrm{m \cdot s^{-2}}$), musíme z jednej strany rovnice odstrániť prebytočné jednotky hmotností m a M (v kg). To znamená, že ich potrebujeme nejakým spôsobom vykrátiť. Pri sčitovaní dvoch hmotností má výsledná hodnota rovnakú jednotku: kg. Zmena nastáva pri násobení, kde je jednotka logicky $\mathrm{kg^2}$ (podobne ako pri obsahu: $\mathrm{m \cdot m = m^2}$). Samotné čísla vo vzorcoch sú bezrozmerné, teda nemajú jednotky. Týmto spôsobom nahradíme všetky premenné ich jednotkami a ak je to možné, vykrátime ich.

a)
$$a = \frac{M+m}{M-m} \cdot g \to \mathrm{m \cdot s^{-2}} = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{kg}} \cdot \mathrm{m \cdot s^{-2}} = \mathrm{m \cdot s^{-2}}\,,$$

b)
$$a = \frac{Mm}{M+m} \cdot g \to \mathrm{m \cdot s^{-2}} = \frac{\mathrm{kg \cdot kg}}{\mathrm{kg}} \cdot \mathrm{m \cdot s^{-2}} = \mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-2}}\,,$$

c)
$$a = \frac{1}{2} \cdot \frac{M-m}{M+m} \cdot g \to \mathrm{m \cdot s^{-2}} = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{kg}} \cdot \mathrm{m \cdot s^{-2}} = \mathrm{m \cdot s^{-2}}\,,$$

d)
$$a = \frac{1}{3} \cdot \frac{m}{M} \cdot g \to \mathrm{m \cdot s^{-2}} = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{kg}} \cdot \mathrm{m \cdot s^{-2}} = \mathrm{m \cdot s^{-2}}\,,$$

e)
$$a = (M+m) \cdot \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right) \cdot g \to \mathrm{m \cdot s^{-2}} = (\mathrm{kg} + \mathrm{kg}) \cdot \left(\frac{1}{\mathrm{kg}} + \frac{1}{\mathrm{kg}}\right) \cdot \mathrm{m \cdot s^{-2}} =$$
$$= \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{kg}} \cdot \mathrm{m \cdot s^{-2}} = \mathrm{m \cdot s^{-2}}\,,$$

2) **extrémna situácia**
Čo by sa stalo, ak by jedno závažie (M) bolo veľmi ťažké a druhé veľmi ľahké ($m = 0$)? Na ťažké závažie pôsobí gravitačná sila, a keďže ľahké závažie ho nebrzdí (je tak ľahké, že ho môžeme zanedbať), bude padať voľným pádom ($a = g$). Poďme sa pozrieť, či to platí aj pri našich výsledkoch:

a)
$$a = \frac{M+m}{M-m} \cdot g = \frac{M}{M} \cdot g = g$$

b)
$$a = \frac{M \cdot m}{M+m} \cdot g = a = \frac{0}{M} \cdot g = 0$$

c)
$$a = \frac{1}{2} \cdot \frac{M-m}{M+m} \cdot g = a = \frac{1}{2} \cdot \frac{M}{M} \cdot g = a = \frac{g}{2}$$

d)

$$a = \frac{1}{3} \cdot \frac{m}{M} \cdot g = \frac{1}{3} \cdot \frac{0}{M} \cdot g = 0$$

e)

$$a = (M+m) \cdot \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right) \cdot g = \left(\frac{m}{m} + \frac{m}{M} + \frac{M}{m} + \frac{M}{M}\right) \cdot g = \left(\frac{0}{M} + \frac{M}{0} + 2\right) \cdot g \rightarrow \text{deliť 0 sa nedá}$$

Jediný výsledok, ktorý spĺňa podmienku, je a).

3) **extrémna situácia**
A čo by sa stalo, kebyže sú obidve závažia rovanko ťažké ($M = m$)? Vieme predsa, že by mala nastať rovnováha, teda závažia nezrýchľujú ($a = 0$).

a)

$$a = \frac{M+m}{M-m} \cdot g = \frac{m+m}{m-m} \cdot g \rightarrow \text{opäť delenie 0 (nedá sa)}$$

b)

$$a = \frac{M \cdot m}{M+m} \cdot g = \frac{m \cdot m}{m+m} \cdot g = \frac{m}{2} \cdot g \rightarrow \text{ak } m \neq 0\text{, potom } a \neq 0$$

c)

$$a = \frac{1}{2} \cdot \frac{M-m}{M+m} \cdot g = \frac{1}{2} \cdot \frac{m-m}{m+m} \cdot g = 0$$

d)

$$a = \frac{1}{3} \cdot \frac{m}{M} \cdot g = \frac{1}{3} \cdot \frac{m}{m} \cdot g = \frac{g}{3}$$

e)

$$a = (M+m) \cdot \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right) \cdot g = (m+m) \cdot \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m}\right) \cdot g = 2m \cdot \frac{2}{m} \cdot g = 4g$$

Jediný výsledok, ktorý spĺňa podmienku, je c).

Keďže ani jeden výsledok neprešiel všetkými podmienkami, ani jeden nie je správny (správny výsledok je $a = \frac{M-m}{M+m} \cdot g$).

Hodnotenie Každý spôsob kontroly bol ohodnotený 3 bodmi.