Fyzikálny korešpondenčný seminár
8. ročník, 2014/2015
UFO, KTFDF FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava
e-mail: otazky@fks.sk web: http://ufo.fks.sk

Vzorové riešenia 1. kola letnej časti 2014/2015

1.1 Moreplavci a piráti (opravoval Hellboy, vzorák Silvia)

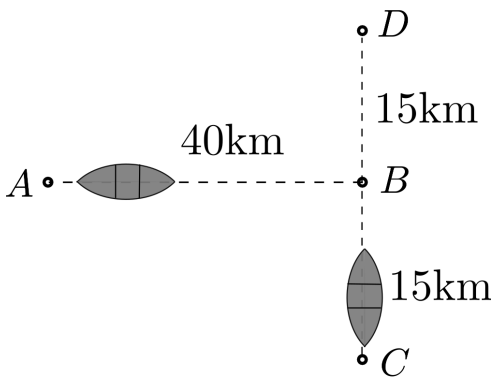
Skúsený pirát Žaba sa plaví po mori. Doteraz každý, kto sa k nemu priblížil bližšie, ako na $10\,\mathrm{km}$, bol olúpený, lebo to pirát Žaba považoval za útok na jeho majestátny poklad, ktorý má na lodi. Ostatných milosrdne necháva plaviť sa ďalej.

Mladá moreplavkyňa Čajka sa chce na svojom korábe plaviť z mesta C do mesta D, no od zvedov zistila, že pirát Žaba sa práve teraz nachádza v bode A a mieri na východ k majáku B. Odtiaľ to chce stočiť smerom na juh k mestu C. Čajka navyše vie, že pirátska loď sa plaví rýchlosťou $20\,\mathrm{km/h}$ a jej loď sa bude plaviť rýchlosťou $15\,\mathrm{km/h}$.

Vzdialenosť z mesta C do mesta D je $30\,\mathrm{km}$ a maják B je presne v strede medzi týmito dvoma mestami. Bod A je $40\,\mathrm{km}$ na západ od majáku B.

Nakreslite graf závislosti vzájomnej vzdialenosti Čajkinej a Žabovej lode od času. Následne pomocou grafu určte, ako najbližšie sa Čajkina loď dostane k Žabovej. Podarí sa moreplavkyni Čajke preplávať bez toho, aby ju pirát Žaba olúpil?

Veľkosti korábov (lodí) zanedbajte.



Obr. 1: Situácia na mori, uhly $\measuredangle ABC$ a $\measuredangle ABD$ sú pravé

V prvom rade si vypočítame celkový čas, za ktorý sa moreplavkyňa Čajka preplaví z bodu C do bodu D, ako aj čas, za ktorý príde pirát Žaba z bodu A do bodu B. Použijeme na to vzorec $t = s/v$, kde t je čas, s je dráha a v je rýchlosť.

Generálny partner
Partneri
Mediálny partner

Čajka:

$$t_{\check{C}} = \frac{|CD|}{v_{\check{C}}} = \frac{30\,\mathrm{km}}{15\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}} = 2\,\mathrm{h}\,.$$

Žaba:

$$t_{\check{Z}} = \frac{|AB|}{v_{\check{Z}}} = \frac{40\,\mathrm{km}}{20\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}} = 2\,\mathrm{h}\,.$$

Obaja sa teda budú plaviť 2 hodiny.

To znamená, že úsek Žabovej cesty z bodu B do bodu C ani nemusíme brať do úvahy, keďže vtedy je už Čajka bezpečne v meste D. V čase, ktorý nás zaujíma, sa teda obe lode budú plaviť rovnomerne priamočiaro.

Teraz sa už môžeme pustiť do výpočtov potrebných na kreslenie grafu. Predstavme si myslenú čiaru, ktorá spája Čajkinu a Žabovu loď. Táto úsečka je prepona pravouhlého trojuholníka, pričom jeho prvá odvesna bude vzdialenosť, ktorá Žabovi ostáva do cieľa (do bodu B) a druhá odvesna, bude vzdialenosť medzi Čajkou a bodom B. Keď Čajka prejde bodom B, náš trojuholník sa preklopí (otočí okolo úsečky $|AB|$). Dĺžku prepony zistíme pomocou Pytagorovej vety:[1]

$$a^2 + b^2 = c^2\,.$$

Keďže chceme zistiť dĺžku prepony, upravíme vzorec na $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Stačí nám už len dosadiť vzdialenosti a a b. Keďže sa lode plavia konštantnou rýchlosťou, obe vzdialenosti budú mať tvar $s + vt$. V našom prípade je a vzdialenosť medzi Žabom a bodom B, teda

$$a = |AB| - v_{\check{Z}} t\,.$$

Vzdialenosť b je trochu zaujímavejšia. Má to byť Čajkina vzdialenosť od bodu B. Otázkou zostáva, či to vieme vyjadriť jediným vzorcom pre obe polovice jej cesty, keďže sa nám náš sledovaný trojuholník „preklopí“. Zapíšme to takto:

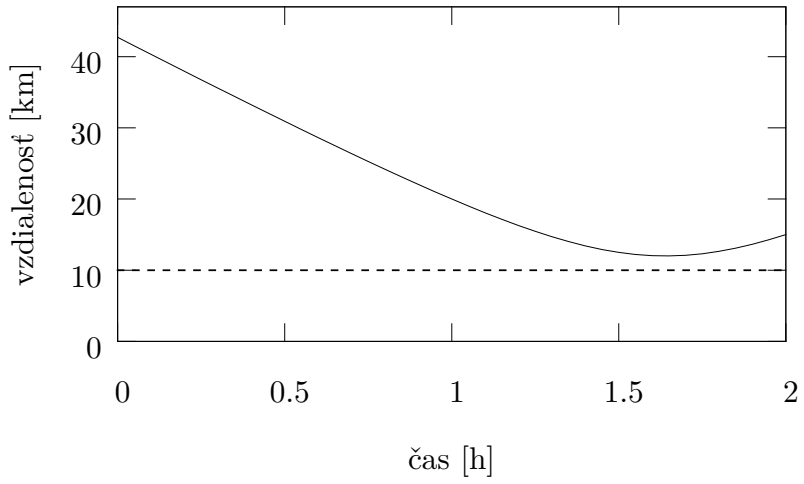
$$b = |BC| - v_{\check{C}} t\,.$$

Vidíme, že v druhej polovici plavby bude b záporné. To nám ale neprekáža, pretože my potrebujeme iba druhú mocninu b, ktorá je rovnaká, ako keby bolo b kladné, takže nám to bude sedieť. Teraz si toto všetko dosadíme do vzorca na výpočet prepony(hľadanej vzdialenosti) a pre konkrétne hodnoty dostaneme

$$c = \sqrt{\left(40\,\mathrm{km} - 20\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \cdot t\right)^2 + \left(15\,\mathrm{km} - 15\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \cdot t\right)^2}\,.$$

Keďže vieme, že sa budú plaviť rovnako dlho, za čas môžeme dosadiť ľubovoľnú hodnotu z intervalu $\langle 0\,\mathrm{h}; 2\,\mathrm{h}\rangle$. Na základe toho zostrojíme graf ako na obrázku 2.

[1] „Obsah štvorca zostrojeného nad preponou (najdlhšou stranou) pravouhlého trojuholníka je rovný súčtu obsahov štvorcov zostrojených nad jeho odvesnami.“



Obr. 2: Závislosť vzájomnej vzdialenosti Čajky a Žabu od času je znázornená plnou čiarou. Prerušovanou čiarou je znázornená minimálna vzdialenosť, za ktorú Čajka nesmie preplávať.

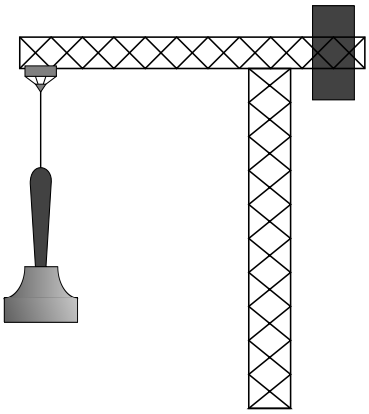
Mohli ste to spraviť ručne pre pár hnodnôt, ale omnoho jednoduchšie je to spraviť v nejakom tabuľkovom editore, kde sa dajú voliť malé rozdiely medzi časmi.[2] Z grafu vieme vyčítať minimálne c, čo je najbližšie, ako sa Čajkina loď dostane k Žabovej. Je to približne 12 km. Čajke sa teda podarilo preplávať bez toho, aby ju pirát Žaba olúpil.

1.2 Zdatný robotník (opravoval Pedro)

Jerguš si ako malý staval žeriavy, ktoré namiesto háku mali na ramenách pripojené záchodové zvony. Vždy ho zaujímalo, akú hmotnosť dokáže žeriav zdvihnúť v závislosti od polomeru použitého zvona. Vypočítajte to! Prepokladajte, že Jerguš v každom zvone dokáže vytvoriť podtlak Δp.[3] Dĺžka ramena žeriavu, na ktorom visí zvon, je a. Zvon visí z vlečného vozíka (mačky), ktorý sa dokáže hýbať pozdĺž ramena, nemôže sa však k veži priblížiť bližšie, ako $a/4$ (môžete predpokladať, že polomer zvona bude vždy menší ako táto vzdialenosť, teda zvon nebude narážať do veže). Dĺžka druhého ramena, na ktorom visí protiváha s hmotnosťou M, je b. Ukotvenie žeriavu v zemi mu umožňuje stáť, ak je moment sily vzhľadom na najvrchnejší bod veže menší, než $\frac{3Mgb}{2}$ (kde g je gravitačné zrýchlenie). Hmotnosť konštrukcie žeriavu (okrem protiváhy) môžete zanedbať.

[2] Čím menši bude časový krok, tak tým presnejši bude náš graf.

[3] To znamená, že v zvone je tlak vzduchu o Δp menší, ako je okolitý tlak.



Obr. 3: Jergušov žeriav

Ako nám hovorí podimienka, celkový moment síl v najvyššom bode veže nemôže presiahnuť hodnotu $3Mgb/2$. Najprv teda treba pochopiteľne overiť, či by sa žeriav nezvalil, ak by zvon nedržal žiadne bremeno. Tiažová sila pôsobiaca na závažie je $F_g = Mg$, rameno tejto sily vzhľadom na najvyšší bod veže je zo zadania rovné b. Pôsobenie iných síl neuvažujeme. Celkový pôsobiaci moment je teda jednoducho $M_{F_g} = Mgb$, čo je menej ako maximálny povolený moment. Z toho vyplýva, že žeriav je stabilný, aj keď na zvone nie je pricucnuté žiadne bremeno – minimálne obmedzenie hmotnosti teda neexistuje.

Ďalej sa sústreďme na maximálnu možnú hmotnosť bremena. Okrem stability žeriavu musíme zohľadniť aj fakt, že zvon s daným polomerom r nevie zdvihnúť ľubovoľne ťažké bremeno. Najskôr ale vypočítajme, ako maximálnu prípustnú hmotnosť ovplyvňuje obmedzenie na celkový moment sily.

Označme x vzdialenosť vlečného vozíka od osi otáčania (vrchu veže). Ak na zvon pricucneme bremeno s hmotnosťou m, moment tiažovej sily, ktorým bremeno pôsobí na vrch veže, je mgx. Okrem toho, na druhej strane žeriavu stále pôsobí protizávažie, ktoré sa momentom sily Mgb „snaží“ preklopiť žeriav na druhú stranu. Z toho vyplýva, že na získanie celkového momentu sily musíme tieto dva príspevky odčítať.[4] Ich rozdiel nemôže podľa zadania presiahnuť maximálnu hodnotu, teda

$$mgx - Mgb \leq \frac{3Mgb}{2} \qquad \Rightarrow \qquad m < \frac{5Mb}{2x}\,.$$

Vidíme, že čím bude x menšie, tým bude môcť byť m väčšie. Najmenšiu vzdialenosť vozíka, teda aj najväčšiu hmotnosť bremena získame tak, že zvon sa bude nachádzať v najmenšej možnej vzdialenosti $x = a/4$ od veže žeriavu. Maximálna hmotnosť závažia je teda

$$m_{\max} = \frac{5Mb}{2 \cdot \frac{a}{4}} = \frac{10Mb}{a}\,.$$

Zostáva nám už iba spočítať, akú maximálnu hmotnosť môže poňať samotný zvon, bez ohľadu na momenty síl. Hmotnosť bremena musí spĺňať rovnicu $mg < \Delta pS$, kde $\Delta pS = \Delta p\pi r^2$ je tlaková sila, ktorou pôsobí na teleso pricucnutý zvon.[5] V skutočnosti ide

[4] Keďže nám ide o určenie maximálnej hmotnosti, väčší príspevok bude ten od bremena, nie od protizávažia – preto ich od seba odčítavame v tomto poradí.

[5] Rozmyslite si, že keď tlak je sila na plochu, tak tlak krát plocha je nutne sila.

o rozdiel medzi tlakovou silou, ktorou na bremeno pôsobí atmosféra zospodu a tlakovou silou, ktorou na bremeno pôsobí zvrchu. Keďže sa opäť bavíme o maximálnej hmotnosti, nerovnica sa zmení na rovnicu

$$m_{\max} g = \Delta p \pi r^2 \qquad \Rightarrow \qquad m_{\max} = \frac{\Delta p \pi r^2}{g} \,.$$

Vidíme, že maximálna hmotnosť, ktorú zvon udrží závisí na polomere zvonu na druhú. Teda napríklad dvakrát väčší zvon udrží štyrikrát väčšiu hmotnosť.

Nesmieme ale zabúdať na prvú podmienku, ktorú sme si odvodili. Nejaký, dostatočne veľký zvon totiž môže zdvihnúť väčšie bremeno, ako je žeriav schopný udržať. Ak porovnáme dve podmienky pre $m_{\max}$, môžeme zistiť, aký polomer zvonu $r_{\max}$ je schopný takto ťažké bremeno zdvihnúť:

$$\frac{10Mb}{a} = \frac{\Delta p \pi r_{\max}^2}{g} \,,$$

z čoho vyplýva

$$r_{\max} = \sqrt{\frac{10Mbg}{a\Delta p}} \,.$$

Ak Jerguš použije zvon s väčším polomerom, nebude mu to nič platné. Ak ním pricucne maximálnu hmotnosť, ktorú pricucnúť vie, poruší tým určite podmienku stability svojho žeriavu.

1.3 Ako to ohriať? (opravoval Paťo)

Predstavte si, že idete na výlet s Jančim a chcete si tam uvariť 1 liter polievky. Čo na to potrebujete? No predsa niečo, na čom si ju uvaríte! Janči vám povedal, že máte zobrať taký zdroj energie, ktorý bude ľahký, no zároveň z neho získate veľa tepla. Na výber máte: propánbutánovú bombu, autobatériu a upravenú dvojplatiničku, čierne uhlie, benzín a nakoniec balóniky naplnené vodíkom. Pre každý zdroj určte jeho výhrevnosť a odhadnite, akú veľkú hmotnosť si potrebujete so sebou zobrať na uvarenie 1 litra polievky.

Na základe toho sa rozhodnite, ktorý zdroj energie si zoberiete na výlet. Nezabudnite konkrétne hodnoty výhrevností a hmotností uviesť vo svojom riešení.

Výhrevnosť H je technická veličina, ktorá nám hovorí, akú energiu získame spálením 1 kg materiálu. Jej jednotka je preto J/kg, často sa ale používa s predponami mega (MJ/kg) a giga (GJ/kg).

Ak zalovíme na internete, nájdeme všetky potrebné informácie. Na wikipédii[6] môžeme nájsť rovno dve výhrevnosti

$$H_{\text{uhlie}} = 30\,\text{MJ/kg}\,,$$
$$H_{\text{benzín}} = 43{,}5\,\text{MJ/kg}\,.$$

Keďže skvapalnená zmes propánu a butánu je známa skôr pod skratkou LPG, na wikipédii[7] môžeme ľahko nájsť

$$H_{\text{LPG}} = 46\,\text{MJ/kg}\,.$$

[6] http://sk.wikipedia.org/wiki/Výhrevnosť
[7] http://cs.wikipedia.org/wiki/LPG

Na to, aby sme našli výhrevnosť vodíka, stačí toto heslo zadať do nejakého internetového vyhľadávača. Dozvieme sa,[8] že výhrevnosť vodíka pri jeho zlučovaní sa na vodu je 33,3 kWh/kg. To je ale iná jednotka, ako sme videli doteraz: kilowatthodina (kWh) je jednotka energie obľúbená hlavne v energetike. Pri prevode na jouly ju musíme najskôr premeniť na wattsekundy, pretože 1 Ws = 1 J:

$$1\,\mathrm{kWh} = 1000\,\mathrm{Wh} = 1000 \cdot 3{,}600\,\mathrm{Ws} = 3\,600\,000\,\mathrm{J} = 3{,}6\,\mathrm{MJ}\,.$$

Výhrevnosť vodíka je teda

$$H_{\text{vodík}} = 33{,}3 \cdot 3{,}6\,\mathrm{MJ/kg} = 120\,\mathrm{MJ/kg}\,.$$

Najtvrdším orieškom je zistiť, koľko energie vytrieskame z autobatérie – pochopiteľne, energia sa z nej dá získať aj inak, ako jej spálením. Na eshope s autobatériami[9] sa dočítame, že typická kapacita batérií sa pohybuje medzi 30 Ah a 110 Ah. Ako si vieme odvodiť z jednotky, toto číslo znamená, že batériou dokáže jednu hodinu tiecť prúd od 30 do 110 ampérov a potom sa vybije. Naviac, na webe sa môžeme dočítať, že typické napätie na batériach je 12 V. Elektrický výkon je rovný súčinu napätia a prúdu, takže typická batéria dokáže po dobu jednej hodiny dodávať výkon medzi $30\,\mathrm{A} \cdot 12\,\mathrm{V} = 360\,\mathrm{W}$ a $110\,\mathrm{A} \cdot 12\,\mathrm{V} = 1320\,\mathrm{W}$. Ak tento výkon vynásobíme časom vyskytujúcim sa v jednotke kapacity, dostaneme celkovú získateľnú energiu. Samozrejme, rovnako ako v prípade kilowatthodín, nesmieme zabúdať na správne jednotky

$$E_{\text{batéria}} = 30\,\mathrm{Ah} \cdot 12\,\mathrm{V} = 30 \cdot 3600\,\mathrm{As} \cdot 12\,\mathrm{V} = 30 \cdot 3600 \cdot 12\,\mathrm{AVs} \approx 1\,300\,000\,\mathrm{J} = 1{,}3\,\mathrm{MJ}\,.$$

Aby sme dostali výhrevnosť v správnych jednotkách, musíme energiu vydeliť typickou hmotnosťou autobatérie (povedzme 15 kg). Dostávame tak

$$H_{\text{batéria}} = \frac{1{,}3\,\mathrm{MJ}}{15\,\mathrm{kg}} \approx 0{,}09\,\mathrm{MJ/kg}\,.$$

Ak rovanký výpočet urobíme s maximálnou predávanou kapacitou, dostaneme

$$H^*_{\text{batéria}} \approx 0{,}3\,\mathrm{MJ/kg}.$$

Tým sme našli všetky výhrevnosti materiálov, ktoré máme na výber. Jasne vidíme, že najviac energie s najmenšou vynaloženou námahou získame spálením vodíka, pretože jeho výhrevnosť je najvyššia.

Aby sme zistili, koľko toho vodíka vlastne potrebujeme, musíme si vypočítať, koľko tepla potrebujeme na uvarenie polievky. Polievka – to je skoro voda, preto môžme povedať, že jej merná tepelná kapacita je rovná kapacite vody, teda $c = 4200\,\mathrm{J/(kg\,°C)}$. Rovnako to bude aj s hustotou, liter polievky váži približne $m = 1\,\mathrm{kg}$. A nakoniec, na to, aby sa polievka začala variť, musíme ju ohriať z teploty 15 °C na 100 °C, teda o $\Delta t = 85\,°\mathrm{C}$. Potrebné teplo dostaneme z kalorimetrickej rovnice

$$Q_{\text{polievka}} = mc\Delta t = 1\,\mathrm{kg} \cdot 4200\,\mathrm{J/kg°C} \cdot 85\,°\mathrm{C} = 357\,000\,\mathrm{J} = 0{,}357\,\mathrm{MJ}\,.$$

[8] http://fem7.uniag.sk:8880/kexo/node/15

[9] http://www.vsetkonaauto.sk/vsetkonaauto/eshop/4-1-Autobaterie

Potrebnú hmotnosť vodíka zistíme tak, že toto teplo vydelíme jeho výhrevnosťou.[10] Ak v oboch veličinách použijeme megajouly, nemusíme nič premieňať a dostaneme hmotnosť vodíka v kilogramoch

$$m_{\text{vodík}} = \frac{Q_{\text{polievka}}}{H_{\text{vodík}}} = \frac{0{,}357\,\text{MJ}}{120\,\text{MJ/kg}} \approx 0{,}003\,\text{kg} = 3\,\text{g}\,.$$

Takže len 3 gramy vodíka uvaria polievku! Mohlo by sa zdať, že to je predsa nič. Vypočítajme si preto, aký veľký musí byť vodíkový balónik. Pri normálnom atmosférickom tlaku (teda na úpätí hory) je jeho hustota[11] len $0{,}09\,\text{g}/\ell$. Jeho objem je

$$V_{\text{vodík}} = \frac{m_{\text{vodík}}}{\rho} = \frac{3\,\text{g}}{0{,}09\,\text{g}/\ell} \approx 33\,\ell\,.$$

Takže dostatok vodíka na uvarenie polievky by sa zmestilo do niekoľkých balónov. V skutočnosti by sme potrebovali vodíka ešte viac: nejaké teplo sa spotrebuje aj pri vare, a časť vodíka unikne z balónika skôr, ako Janči začne byť hladný.

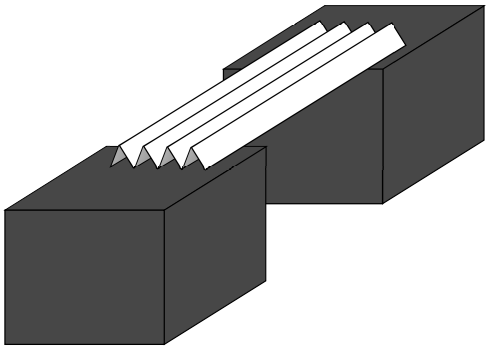
Naozaj, vodík je veľmi efektívne palivo (a namiesto v balóniku by sme si ho na hory mohli zobrať v tlakovej nádobe). Dôvod, prečo sa nepoužíva, je jeho vysoká cena a fakt, že je výbušný. Preto sa tlakové nádoby pre turistov plnia najmä propánbutánom, ktorý sa v našom porovnaní výhrevností umiestnil na druhej priečke.

1.4 Staviame mosty (opravoval Dušan)

Keď bol Maťko malý, chcel sa stať architektom mostov a rád si ich staval z papiera. Keďže ale nebol veľmi kreatívny, jediné, na čo sa zmohol, bolo vytvárať z jedného papiera veľkosti A4 harmoniku s rôznym počtom „zubov“ (ako na obrázku 4). Zistite, ako závisí nosnosť mosta v strede od počtu zubov. Na vytvorenie mosta použite vždy celý papier A4.

Papier vždy zaohýbajte pozdĺž jeho dlhšej strany. Na prichytenie mosta na okrajoch môžete použiť napríklad nejaké pevné a ťažké predmety, ktoré položíte vedľa zubov tak, aby zabránili roztváraniu zubov na okrajoch papiera, poprípade použiť malé množstvo lepiacej pásky.

Ako závažia môžete použiť keksíky alebo iné sladkosti, tie majú totiž výrobcami dobre definované hmotnosti.



Obr. 4: Harmonikový most

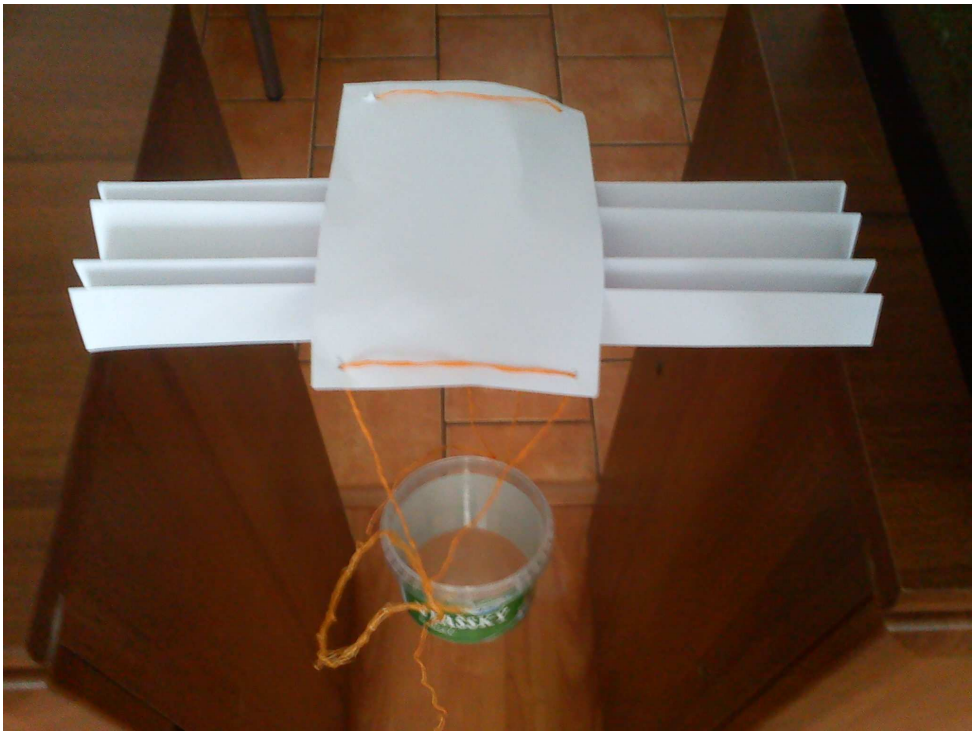
Prvá vec, ktorú treba urobiť hneď, ako si prečítame zadanie, je zadefinovanie si nášho problému. Tak to spravíme aj my.

[10] Úplne analogicky by sme vypočítali aj hmotnosti zvyšných palív.

[11] http://sk.wikipedia.org/wiki/Vod%C3%ADk

Zadanie od nás chce nameranie závislosti nosnosti harmonikového mosta od počtu jeho zubov. Počet zubov budeme rátať ako počet vrcholov smerujúcich *iba* hore (alebo iba dole). Teda ak prehneme list A4 na štyri časti, náš most bude mať dva zuby. Taktiež je vhodné, aby sme pri našich meraniach menili iba tento parameter, keďže jeho vplyv na nosnosť chceme preskúmať. Preto sme sa rozhodli, že náše mosty budú mať vždy konštantnú šírku 10 cm a našu záťaž budeme vždy rozkladať na rovnaký povrch (vyrobili sme si vedierko so závesom, do ktorého sme pridávali závažia). Aj tieto parametre majú totiž na nosnosť veľký vplyv: napríklad je rozdiel, či sústredíte záťaž do jedného bodu, alebo ju rozložíte po celom povrchu. Posledná vec, ktorú si musíme zadefinovať, je kolaps mostu. Budeme ním chápať akékoľvek zrútenie, či už by to bolo preklopenie, zošmyknutie, alebo pokrčenie a spadnutie.

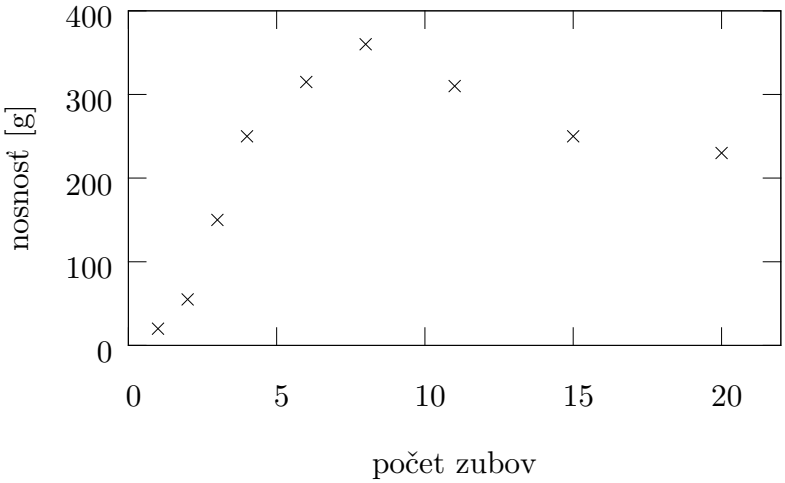
Samotná realizácia experimentu by mala byť pomerne jednoduchá. Vezmeme A4, prehneme ju na správnych miestach a máme most. Nájdeme medzeru, ktorá je o kúsok kratšia ako dĺžka A4, položíme, prípadne upevníme most a začneme merať.



Obr. 5: Aparatúra: most

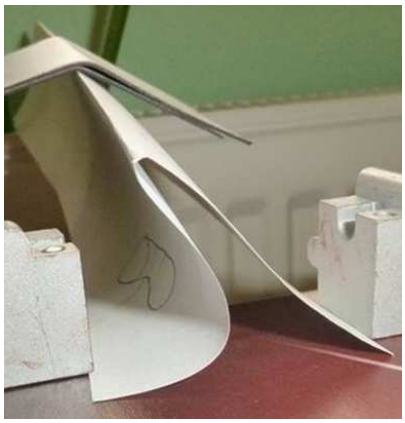
Pre každý počet zubov mosta je väčšinou vhodné urobiť viacero meraní. Pokiaľ ste papier skladali vždy rovnako presne, ukáže sa, že výsledky sa medzi jednotlivými meraniami pre ten istý počet zubov mosta nebudú skoro vôbec odlišovať. Preto sme si dovolili naše merania neopakovať a zmerať to iba raz.[12]

[12] Vo všeobecnom prípade si musíme dávať pozor na rozptyl našich meraní a odchýlku nameraných hodnôt od priemernej. Čím je táto odchýlka vyššia, tým viac meraní by sme mali spraviť, aby sme si boli finálnym výsledkom naozaj istí. Našťastie, v tejto úlohe sme od vás nevyžadovali jej výpočet.



Obr. 6: Graf závislosti nosnosti od počtu zubov

Ako vidíte, merali sme[13] v rozpätí od jedného po dvadsať zubov, avšak nie úplne všetky počty zubov. Dôvod je prostý: z menšieho množstva meraní vieme predpovedať, ako bude vyzerať zvyšok závislosti. Ak budeme zvyšovať počet zubov až po 8, nosnosť mosta bude rásť až po 360 g. Pri veľmi malom počte zubov zvykol most kolabovať najmä kvôli ohýbaniu zubov, ktoré boli príliš dlhé, do strán. Po prekročení hranice ôsmych zubov začínali byť zuby menšie. Tým pádom sa ale stávali aj menej pevné, a teda sa pri záťaži krčili.



Obr. 7: Ohnutie mosta

Obr. 8: Pokrčenie mosta

1.5 PoHa (opravovala Kamča, vzorák Katka)

Samo a Poli sa rozhodli, že z nich budú podnikatelia. V rámci prieskumu výnosov zvažovali aj vstup do pukancového biznisu. Preto rozmýšľali, koľko pukancov sa zje v slovenských kinách za jeden rok. Skúste to odhadnúť.

[13] Za poskytnuté dáta ďakujeme TMFákom z GJH, ktorí túto úlohu riešili pred dvoma rokmi pre všetky možné typy mostov. Pre zaujímavosť, z jednej A4 sa dá vyrobiť most, ktorý unesie 14 kg. Áno, čítate dobre.

Na tento príklad bolo treba vykopať nejaké matematické náčinie a trošku sedliackeho rozumu. Čo to od nás tí vedúci chcú? Najprv si to skúsme ujasniť. Máme odhadnúť, koľko populárnej kukurice sa zje v slovenských kinách za jeden rok. Kľúčové slovo je *odhadnúť*. To znamená že to nejdeme vypočítavať, ani určovať s presnosťou na tri desatinné miesta. Budeme zisťovať nejaké parametre, od ktorých to závisí a tie, ktoré nebudeme vedieť presne, odhadneme.

Od čoho závisí, koľko popolárnej kukurice sa zje v slovenských kinách za jeden rok? V prvom rade to závisí od toho, koľko ľudí do toho kina príde. Veľa sme googlili a našli sme stránku Audiovizuálneho informačného centra (`http://www.aic.sk`), ktorá zverejňuje dokument s názvom: „Správa o stave slovenskej audiovízie v roku 2013“, kde tvrdia, že: „V roku 2013 prišlo do slovenských kín 3 725 709 divákov. Je to o 8,42% viac než v roku 2012 (3 436 269 divákov).“ Môžeme teda povedať, že ročne je to zhruba 3,5 milióna ľudí.[14]

Koľko kukurice spapá taký priemerný návštevník kina? V takých tých obchodnodomových moderných kinách predávajú kukuricu v troch objemoch, 1,8 ℓ, 2,4 ℓ a 5 ℓ. Odhadnime, že najviac ľudí si volí buď 1,8 ℓ, alebo 2,4 ℓ. Povedzme teda, že sú to zhruba 2 ℓ na priemerného papača kukurice.[15]

Ako teraz zistíme, koľko z tých ľudí, čo boli v kine, si kúpilo kukuricu?

V tomto momente ste mohli robiť rôzne veci. Napríklad využiť modrú sociálnu sieť a dať tam anketu. Mohli ste ísť do kina a spočítať ľudí v sále s a bez kukurice. Samozrejme, existuje mnoho iných spôsobov. Povedzme ale, že kukuricu si kúpi každý piaty návštevník kina.

No a teraz to už len spočítať.

$$3\,500\,000\,\frac{\text{ľudí}}{\text{rok}} \cdot \frac{1\,\text{balíček}}{5\,\text{ľudí}} \cdot 2\,\frac{\ell}{\text{balíček}} = 1\,400\,000\,\frac{\ell}{\text{rok}}\,.$$

A máme to tu, hrubý odhad ktorý vôbec nemusí zodpovedať realite, pretože sme dosť zaokrúhľovali, no s presnosťou na milióny sme to hádam trafili. :)

1.6 Moreplavci a podvodníci (opravoval Baklažán)

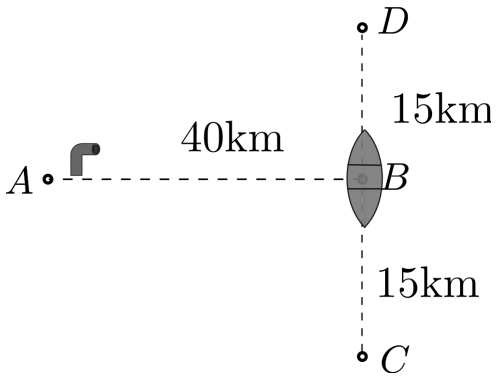
Zdá sa vám obrázok povedomý? Skúsený pirát Žaba sa znovu plaví po mori. Od vtedy, čo sa mu dlho nedarilo olúpiť mladú moreplavkyňu Čajku, sa už trochu poučil a vymenil svoju pirátsku loď za pirátsku ponorku. Čajka ju nemá šancu zbadať, a tak sa bude plaviť rovno, akoby sa nechumelilo. Pre Čajku už zosnoval ukrutný plán pomsty. Ak nebude mať jej poklad on, tak ho nebude mať ani ona a jej loď potopí torpédom vystreleným z útrob jeho ponorky.

Čajka sa teraz nachádza pri majáku v bode B, jej loď má rýchlosť $10\,\mathrm{m/s}$ a pláva smerom do mesta D. Žabova ponorka sa nachádza v bode A, má rýchlosť $8\,\mathrm{m/s}$ a pláva priamo smerom k majáku v bode B. Keďže Žaba nebol nikdy žiadny veľký fyzik, má problém určiť, ako má to torpédo vlastne vystreliť. Pomôžte mu s nasledujúcimi úlohami.

- Zistite a zakreslite všetky smery (vo vhodnej vzťažnej sústave), ktorými môže vystreliť torpédo nejakou vhodnou rýchlosťou tak, aby trafilo Čajkinu loď.
- Akú najmenšiu rýchlosť môže mať torpédo (vzhľadom na loď) a stále pritom zasiahnuť loď? Na vystrelenie torpéda veľkou rýchlosťou totiž treba peniaze na lepšie delo, a Žaba chce čo najviac ušetriť.

[14] Toto sa, samozrejme, dalo aj odhadnúť. Spočítali by sme počet kín na Slovensku, odhadli by sme počet návšetevníkov za deň/týždeň a prenásobili to 365/52.

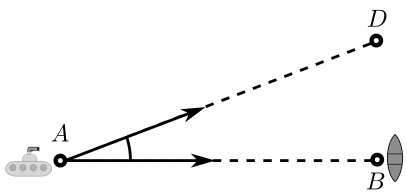
[15] Samozrejme, nájdu sa aj takí, čo si vrecko kukurice donesú z domu, ale tých zanedbáme. Nie nepozerajte sa na nás, my bojujeme za práva kukurice.



Obr. 9: Situácia na mori, uhly $\measuredangle ABC$ a $\measuredangle ABD$ sú pravé

Prvá úloha Najprv sa na úlohu pozrime vo vzťažnej sústave bodu A. Keďže Čajkina loď sa hýbe z bodu B do bodu D, v okamihu, keď ju zasiahne torpédo, bude niekde medzi týmito dvoma bodmi. Preto bod, kde torpédo narazí do lode, musí byť niekde medzi bodmi B a D. To znamená, že torpédo musí mieriť niekde dovnútra úsečky BD. Môže ale mieriť na hociktorý bod tejto úsečky?

Ak by sme predpokladali, že torpédo môže ísť ľubovoľne rýchlo, potom by naozaj všetky tieto smery boli možné. Pre ľubovoľný bod E vnútri úsečky BD, na ktorý by torpédo mierilo, by mu stačilo ísť tak rýchlo, aby vzdialenosť $|AE|$ prešlo za rovnaký čas, ako Čajka prejde vzdialenosť $|BE|$. V skutočnosti je rýchlosť torpéda zhora ohraničená konečnou rýchlosťou svetla (kvôli teórii relativity) a už pri rýchlostiach o niečo menších, ako je rýchlosť svetla, by torpédo Žabovi narobilo viac problémov, než by chcel[16]. Preto torpédo v skutočnosti nemôže mieriť príliš blízko k bodu B.



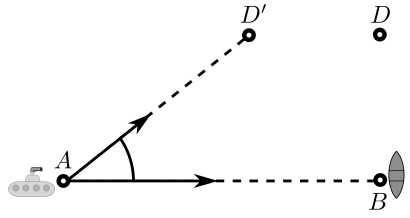
Obr. 10: Možné smery torpéda vo vzťažnej sústave bodu A

Teraz sa na úlohu pozrime z pohľadu Žabovej ponorky. Vieme, že Čajke bude cesta z B do D trvať čas

$$t_\mathrm{c} = \frac{15\,\mathrm{km}}{10\,\mathrm{m/s}} = 1500\,\mathrm{s}\,.$$

[16] https://what-if.xkcd.com/1/

Vo vzťažnej sústave Žabovej ponorky sa mesto D hýbe rýchlosťou $8\,\mathrm{m/s}$ smerom na západ. To znamená, že v okamihu, keď by doň mala Čajka doraziť, sa bude nachádzať v bode D', ktorý je od pôvodnej polohy bodu D vzdialený $s_\mathrm{z} = 8\,\mathrm{m/s} \cdot 1500\,\mathrm{s} = 12\,\mathrm{km}$. Čajkin pohyb teda zo Žabovho pohľadu začne v bode B a skončí v bode D'. Preto musí mieriť niekam medzi tieto dva body, pričom opäť platí, že nemôže mieriť príliš blízko bodu B.



Obr. 11: Možné smery torpéda vo vzťažnej sústave Žabovej ponorky

Zaujímavosťou je, že Žaba bude musieť torpédo vypustiť tým smerom, ktorým chce, aby išlo vo vzťažnej sústave bodu A. Je to preto, lebo torpédo sa nehýbe len vďaka tomu, že mu Žaba pri vystrelení udelí nejakú rýchlosť. Väčšinu tejto rýchlosti totiž kvôli odporu vody veľmi rýchlo stratí. V skutočnosti sa torpédo hýbe hlavne kvôli tomu, že má vlastný pohon, ktorým si udržiava stálu rýchlosť vzhľadom na vodu. A táto rýchlosť má taký smer, akým je torpédo otočené.

Druhá úloha Torpédo sa vzhľadom na vodu hýbe rovnomerne priamočiaro. Čajkina loď sa vzhľadom na vodu tiež hýbe rovnomerne priamočiaro. To znamená, že torpédo sa bude aj vo vzťažnej sústave Čajkinej lode hýbať rovnomerne priamočiaro. Na celý dej odteraz pozerajme v Čajkinej vzťažnej sústave.

Čas od vypustenia torpéda po zrážku s loďou označme t_z. V okamihu vystrelenia sa torpédo nachádza $s = 40\,\mathrm{km}$ západne od lode. Tesne pred zrážkou s loďou sa torpédo nachádza tesne pri lodi. Medzi vypustením a zrážkou pôjde torpédo rovnomerne priamočiaro. To znamená, že v Čajkinej vzťažnej sústave pôjde smerom na východ a prejde vzdialenosť s. Jeho rýchlosť teda musí mať veľkosť $v = s/t_\mathrm{z}$.

Už vieme, že cesta z bodu B do bodu D by Čajke trvala čas $t_\mathrm{c} = 1500\,\mathrm{s}$. Keďže torpédo má Čajkinu loď zasiahnuť ešte predtým, než príde do mesta D, musí platiť $t_\mathrm{z} < t_\mathrm{c}$. To znamená, že

$$\frac{s}{t_\mathrm{z}} > \frac{s}{t_\mathrm{c}} \qquad \Rightarrow \qquad v > \frac{s}{t_\mathrm{c}}\,.$$

Torpédo teda musí byť rýchlejšie, ako

$$v_\mathrm{min} = \frac{s}{t_\mathrm{c}} = \frac{40\,\mathrm{km}}{1500\,\mathrm{s}} = \frac{40\,000\,\mathrm{m}}{1500\,\mathrm{s}} \doteq 26{,}7\,\mathrm{m/s}\,.$$