Fyzikálny korešpondenčný seminár
8. ročník, 2014/2015
UFO, KTFDF FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava
e-mail: otazky@fks.sk web: http://ufo.fks.sk

Vzorové riešenia 3. kola letnej časti 2014/2015

3.1 Telesná (opravoval Marek)

Kajka sa po namáhavej telesnej rada schladí malou chladenou Kofolou®. Kajka si ale potrpí na štíhlu líniu a bola by nerada, keby prijatím veľkého množstva rýchlych cukrov zničila svoju snahu na telesnej. Preto by ju zaujímalo, akú teplotu by musela mať Kofola®, aby z nej nezískala ani štipku energie.[1] Je vôbec možné Kofolu® schladiť na takúto teplotu? Potrebné údaje o zložení Kofoly® si vyhľadajte na internete.

Kajka chce piť Kofolu tak, aby nezískala žiadnu energiu, teda ak sa napije, musí na zahriatie látky použiť toľko energie, koľko z nej získa. Takže potrebné hľadané informácie sú: energetická hodnota Kofoly (tú vieme nájsť na etikete alebo na internete) a tepelná kapacita Kofoly.

Energetická hodnota Kofoly je 136 kJ na 100 ml a keďže Kofola je prevažne voda, jej hustota je zhruba 1 g/ml. Preto 100 ml Kofoly je zhruba 100 g, teda hmotnostná energetická hodnota Kofoly je približne $\mathcal{H} = 1360\,\mathrm{kJ/kg}$.

Kofola je prevažne voda, s drobnou prímesou iných látok. Väčšinu z týchto prímesí môžeme zanedbať (keďže ich je málo), avšak 8 g cukru na 100 ml nevyzerá úplne zanedbateľne. Preto urobíme úvahu. Merná tepelná kapacita vody je $c_\mathrm{v} = 4200\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\,^\circ\mathrm{C}}$, tepelná kapacita cukru ($\mathrm{C_6H_{12}O_6}$) je $115\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\,^\circ\mathrm{C}}$. Ak tieto látky zmiešame, môžeme predpokladať, že výsledná kapacita roztoku bude niečo medzi, teda menšia ako merná tepelná kapacita vody. Keďže robíme dolný odhad toho, ako veľmi musíme schladiť Kofolu, pri nasledujúcich výpočtoch použijeme tepelnú kapacitu vody.

Spomenieme si na vzorec $Q = mc\Delta T$. Ten nám hovorí, koľko energie získame/stratíme, keď zahrejeme látku hmotnosti m o teplotu ΔT. Merná tepelná kapacita c je konštanta, ktorá je pre každú látku iná – pre vodu je to spomínaných $4200\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\,^\circ\mathrm{C}}$.

Energia získaná z Kofoly závisí priamo úmerne od jej hmotnosti, rovnako ako aj energia potrebná na ohriatie. Z toho vyplýva, že hmotnosť nám tu nebude hrať žiadnu úlohu a preto budeme odteraz všetko počítať pre 1 kg Kofoly.[2]

[1] Teda aby na ohriatie Kofoly® na telesnú teplotu spotrebovala všetku energiu, ktorú získa spálením cukrov z Kofoly®.

[2] Pri úplne všeobecnom odvodení by sa ukázalo, že hmotnosť nebude vystupovať vo vzorci pre výslednú teplotu. Ak tomu neveríte, môžete si všetko odvodiť pre všeobecnú hmotnosť a uvidíte, že nakoniec sa vykráti.

Generálny partner
Partneri
Mediálny partner

Spálením 1 kg Kofoly Kajka získa energiu $Q_\mathrm{s} = m\mathcal{H} = 1\,360\,000\,\mathrm{J}$. Rovnakú energiu musí odovzdať Kofole pri jej ohrievaní. Energia potrebná na zahriatie vody z 0 °C na telesnú teplotu 37 °C je $Q_\mathrm{v} = mc_\mathrm{v}\Delta T = 1\,\mathrm{kg} \cdot 4200\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\,^\circ\mathrm{C}} \cdot 37\,^\circ\mathrm{C} = 155\,400\,\mathrm{J}$. To je zjavne menej ako 1 360 000 J získaných spálením Kofoly. Musíme ju teda schladiť viac, treba sa zbaviť ešte 1 204 600 J.

Ďalší stupienok v chladení je zmena skupenstva voda – ľad. Na jej vypočítanie nám slúži merné skupenské teplo topenia, čo je veličina, ktorá udáva, koľko energie minieme na zmenu skupenstva látky z pevného (ľad) na kvapalné (vodu), pri teplote topenia danej látky bez toho, aby sa zmenila teplota látky. V tabuľkách sa dá dopracovať k číslu $L_\mathrm{t} = 334\,000\,\mathrm{J/kg}$ pre vodu (opäť raz využijeme, že Kofola je prevažne voda). Čiže pri roztápaní našej Kofoly v tele potrebujeme energiu $Q_\mathrm{t} = L_\mathrm{t}m = 334\,000\,\mathrm{J}$. Toto odčítame od energie, ktorej sa treba zbaviť, a zistíme, že ešte stále treba chladiť, pretože stále by sme mali zisk energie 870 600 J. Teraz prichádza na rad chladenie ľadu, ten má inú mernú tepelnú kapacitu ako kvapalná voda. Je to $c_\mathrm{l} = 2090\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\,^\circ\mathrm{C}}$, ale teraz si už nie sme istí, o koľko ho musíme schladiť, preto zostavíme rovnicu.

$$2090\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\,^\circ\mathrm{C}} \cdot \Delta T = 870\,600\,\mathrm{J}\,.$$

Z rovnice dostávame $\Delta T = 416\,^\circ\mathrm{C}$. My chladíme z bodu 0 °C, teda naša Kofola by mala mať teplotu −416 °C. A teraz si predstavme, že tam máme ešte cukor, ktorý má menšiu tepelnú kapacitu ako voda. Tá teplota by bola ešte nižšia! Toto je však je trochu nezmysel, lebo nič nemôže mať teplotu menšiu ako −273,15 °C (tento bod sa volá *absolútna nula*). Preto nemožno schladiť Kofolu na takú teplotu, aby sme po vypití a zahriatí a následnom získaní energie z nápoja boli s príjmom energie na nule. Preto odporúčame Kajke, aby sa buď vyvarovala Kofole, alebo aby viac cvičila.

3.2 Hustá kocka (opravovala Kamča, vzorák Jarka)

Mareka to už prestalo baviť v Trojstene, a tak sa začal hrať s kockou. Jeho kocka má zvláštnu hustotu: keď ju totiž vložíte do vody, bude plávať, pričom nad hladinou bude jedna štvrtina jej **povrchu**. Kocka pláva tak, že jej podstava je rovnobežná s hladinou. Mareka by zaujímalo, akú hmotnosť má jeho kocka, ak jej hrana má dĺžku 1 cm.

Kocku si označíme klasicky pomocou vrcholov ABCDEFGH s hranou dĺžky a. Kocka je zložená zo 6 stien, každá stena má povrch a^2. Preto je povrch celej kocky $6a^2$.

Nad hladinou sa nachádza štvrtina povrchu, teda $6a^2/4 = 3a^2/2$. Ďalej vieme, že povrch strany EFGH, ktorá je celá nad hladinou, je a^2. Zvyšok povrchu, ktorý je nad hladinou, je teda $3a^2/2 - a^2 = a^2/2$.

Tento povrch je rozdelený na rovnaké obdĺžniky tvorené časťami strán ABFE, BCGF, CDHG a DAEH, ktoré sú nad hladinou. Z jednej strany je teda nad hladinou štvrtina, tzn. $a^2/8$. Keďže dĺžka hrany kocky je a, potom výška časti kocky nad hladinou je $a/8$.

Inak povedané, nad hladinou sa nachádza kváder s rozmermi strán $a \times a \times a/8$ a objemom $a^3/8$. Objem zvyšku, teda ponorenej časti kocky je preto $V' = 7a^3/8$.

Keďže kocka pláva na hladine, vztlaková a tiažová sila sú v rovnováhe:

$$V'\rho g = mg\,, \qquad \Rightarrow m = V'\rho = \frac{7a^3\rho}{8}\,.$$

Po dosadení ($a = 1\,\mathrm{cm}$, $\rho = 1\,\mathrm{g/cm^3}$) zistíme, že hmotnosť kocky je $m = \frac{7}{8}\,\mathrm{g}$.

3.3 Pružná (opravoval Samko, vzorák Paťo)

Zožeňte si nejakú pevnejšiu gumičku (napríklad z modelárskeho obchodu alebo z nohavíc :)). Odmerajte, o koľko sa gumička predĺži v závislosti od sily, ktorou gumičku naťahujete.

Prakticky pre všetky materiály platí, že pri pôsobení dostatočne veľkých síl sa materiály deformujú, tzn. menia svoje rozmery, alebo tvar. Ak sa nejaké teleso po vystavení deformácie vráti späť do svojho pôvodného tvaru, tak hovoríme, že deformácia bola *elastická*. Naopak, ak deformácia spôsobí, že teleso zostane deformované, deformácia sa nazýva *plastická*.

Asi nie je ťažké odhadnúť, že v prípade bežných deformácii gumičky pôjde o elastickú deformáciu – pri väčšom zaťažení sa namiesto plastickej deformácie (ktorá je síce možná) gumička jednoducho roztrhne. Bolo zistené, že pri tejto deformácii za pôsobenia malých síl platí, že objem deformovaného materiálu sa nemení. Preto sa síce gumička v smere zaťaženia predlžuje, ale vo zvyšných dvoch rozmeroch sa zužuje. Pre malé deformácie a tenké gumičky je však toto zužovanie také malé, že ho prakticky nepozorujeme a ďalej sa ním preto nemusíme zaoberať.

Za použitia tohoto zanedbania objavil britský fyzik Robert Hooke svoj známy *Hookov zákon*: ak na gumičku (teleso) s prierezom S a pokojovou (nedeformovanou) dĺžkou l_0 pôsobíme silou F, teleso sa predĺži o Δl tak, že platí

$$\frac{F}{S} = E\frac{\Delta l}{l_0}\,.$$

Veličina E sa nazýva Youngov modul pružnosti – je to konštanta charakterizujúca „elasticitu“ daného materiálu.

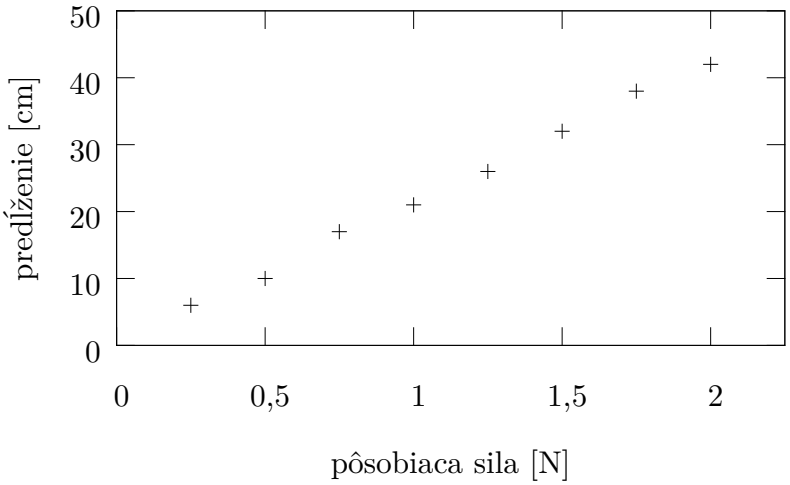
Čo je pre nás dôležité je, že sila F je *priamo úmerná* predĺženiu Δl. Naša teória teda predpokladá, že závislosť F na Δl má tvar priamky.

Správnosť našej teórie si teraz overme experimentom: na meranie sme použili klasickú gumičku do nohavíc, ktorú sme zaťažovali vreckom, do ktorého sme postupne prisypávali známu hmotnosť múky m. Pôsobiacu silu určíme jednoducho, je to tiažová sila múky vo vrecku: $F = mg$, kde $g \doteq 10\,\mathrm{m/s^2}$ je tiažové zrýchlenie.

m [g]	F [N]	Δl [cm]
25	0,25	6
50	0,50	10
75	0,75	17
100	1,00	21
125	1,25	26
150	1,50	32
175	1,75	38
200	2,00	42

Tab. 1: Namerané hodnoty predĺženia gumičky v závislosti na pôsobiacej sile

Meranie sme uskutočnili pre 8 rôznych hmotností. Pravítkom sme merali predĺženie gumičky, viď tabuľku. Nakoniec sme všetky merania vyniesli do grafu, kde sme na vodorovnú os vyniesli pôsobiacu silu a na zvislú os predĺženie.



Obr. 1: Graf závislosti predĺženia od sily

Z grafu je zjavné, že pre náš rozsah pôsobiacich síl sme naozaj dostali priamku – Hookov zákon teda naozaj platí.

3.4 Tajnostkári (opravovala Katka, vzorák Miška L.)

Vladko a Čajka si začali posielať zašifrované správy. Občas sa ale v ich správach vyskytla hodnota nejakej fyzikálnej veličiny. Vladko s Čajkou tušia, že toto je citlivý bod ich šifrovacieho algoritmu, a preto sa rozhodli zašifrovať aj hodnoty fyzikálnych veličín. Z toho dôvodu ich začali uvádzať v pomerne neštandartných jednotkách. Maťo sa nedávno zmocnil ich šifrovacej tabuľky, pomocou ktorej premieňajú jednotky, ale nie je veľmi zručný. Pomôžte mu preto zistiť, čo by nasledujúce hodnoty mohli znamenať, resp. o čom sa Vladko a Čajka mohli rozprávať.

Maťo získal nasledujúce informácie:

$$\begin{aligned} 1\,\text{Maťo} &= 83\,\text{kg}\,, \\ 1\,\text{Vladko} &= 1{,}85\,\text{m}\,, \\ 1\,\text{Zuzka} &= 312{,}15\,\text{K}\,, \\ 1\,\text{Baklažán} &= 0{,}4108\,\text{s}\,. \end{aligned}$$

A taktiež nasledujúce hodnoty fyzikálnych veličín:

$$\begin{aligned} &76{,}284\,\text{Maťo}\,\text{Vladko}^{-3}\,, \\ &6{,}66\cdot 10^{7}\,\text{Vladko}\,\text{Baklažán}^{-1}\,, \\ &64\,336\,\text{Zuzka}^{-1}\text{Vladko}^{2}\,\text{Baklažán}^{-2}\,. \end{aligned}$$

Pomôžte mu preto zistiť, čo by nasledujúce hodnoty mohli znamenať. O čom sa mohli Vladko a Čajka rozprávať?

Najdôležitejšou záležitosťou bolo rozšifrovanie správnych jednotiek. Ak sme zistili toto, tak po dopočítaní hodnôt je už ľahké zistiť, o čom sa Vladko s Čajkou rozprávali. Vrhnime sa teda rovno na to.

Jednoduchšie bude, ak si $76{,}284\,\text{Maťo}\,\text{Vladko}^{-3}$ prepíšeme do zlomkového tvaru[3] ako $76{,}284\cdot\dfrac{\text{Maťo}}{\text{Vladko}^3}$.

[3]Rovnako to spravíme aj v zvyšných prípadoch.

Za jednotlivé mená rovno dosadíme príslušné hodnoty a dostaneme:

$$76{,}284\frac{\text{Maťo}}{\text{Vladko}^3} = 76{,}284 \cdot \frac{83\,\text{kg}}{(1{,}85\,\text{m})^3} \doteq 1000\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\,.$$

Z jednotky vidíme, že sa jedná o hustotu – konkrétne napríklad o hustotu vody.

Poďme na druhý prípad:

$$6{,}66 \cdot 10^7\,\text{Vladko}\,\text{Baklažán}^{-1} = 6{,}66 \cdot 10^7\frac{\text{Vladko}}{\text{Baklažán}} = 6{,}66 \cdot 10^7\frac{1{,}85\,\text{m}}{0{,}4108\,\text{s}} \doteq 3 \cdot 10^8\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\,.$$

Metre za sekundu nám jasne udávajú rýchlosť. Takú obrovskú môže mať jedine svetlo a ak sa pozrieme do tabuliek, zistíme, že je to naozaj tak.

A ostáva nám posledná hodnota, kde po dosadení hodnôt dostaneme:

$$64\,336 \cdot \frac{(1{,}85\,\text{m})^2}{312{,}15\,\text{K} \cdot (0{,}4108\,\text{s})^2} \doteq 4180\,\frac{\text{m}^2}{\text{K} \cdot \text{s}^2}\,.$$

Táto jednotka vyzerá pomerne neznámo, avšak vidíme, že v jednotkovom zápise sa nachádza kelvin, čiže jednotka teploty.

Zamyslime sa, aké fyzikálne veličiny súvisia s teplotou. Ako druhá (hneď po teplote samotnej) nám asi napadne tepelná kapacita, ktorá je nám však známa pod inou jednotkou ($[c] = \frac{\text{J}}{\text{kg}\,\text{K}}$). Mohla by to byť ona? Poďme si to overiť. Joule je jednotka práce a teda nám udáva silu (v Newtonoch) pôsobiacu po dráhe (v metroch). Zápis $[c] = \frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}}$ teda môžeme prepísať na $[c] = \frac{\text{N}\,\text{m}}{\text{kg}\cdot\text{K}}$.

Newton, jednotka sily, je tiež definovná ako sila, ktorá udelí telesu s hmotnosťou 1 kg zrýchlenie $1\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Preto vieme napísať rovnosť $\text{N} = \text{kg} \cdot \text{m/s}^2$.

Po dosadení dostaneme

$$[c] = \frac{\text{kg}\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\,\text{m}}{\text{kg}\,\text{K}} = \frac{\text{m}^2}{\text{K} \cdot\ \text{s}^2}\,.$$

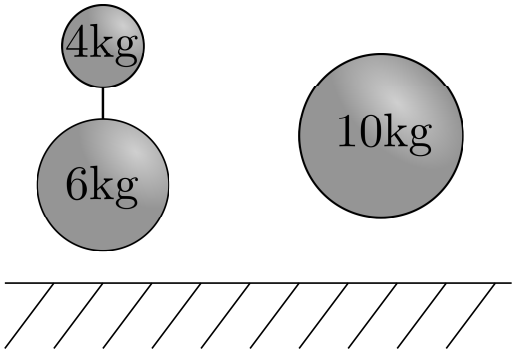
Vidíme teda, že sme mali pravdu. Naviac z hodnoty samotnej veličiny môžeme uhádnuť, že sa jedná o mernú tepelnú kapacitu vody.

3.5 Revolučný fyzik (opravoval Baklažán, vzorák Andrej)

Katka ako malá prišla s alternatívnou teóriou gravitácie. Podľa jej teórie, keď vo vákuu naraz pustíme kamene s rozdielnou hmotnosťou, ťažší kameň bude padať pomalšie ako ten ľahší. Dušanovi sa Katkina teória nepozdávala, a tak prišiel s nasledujúcou otázkou: Ktorý z týchto objektov spadne rýchlejšie?

- šesťkilogramový kameň spojený lankom s štvorkilogramovým
- desaťkilogramový kameň

Dáva vaša odpoveď zmysel?



Obr. 2: Padajúce kamene

Na spojené kamene sa môžeme pozerať buď ako na jedno teleso alebo ako na dve spojené telesá. Na našu otázku potom dostaneme takéto dve odpovede:

Odpoveď číslo jedna: spojené kamene sú jedno teleso. Obe telesá (spojené kamene aj desaťkilogramový kameň) sú rovnako ťažké a keďže predpokladáme, že je to jediný parameter, od ktorého závisí rýchlosť pohybu, obe spadnú naraz.

Odpoveď číslo dva: spojené kamene sú dve spojené telesá. Šesťkilogramové teleso padá pomalšie než štvorkilogramové – máme ich ale spojené lankom, teda štvorkilogramové bude počas pádu ťahať (a tým zrychľovať) to šesťkilogramové (lebo samotné štvorkilogramové, ktoré padá rýchlejšie, by za rovnaký čas zašlo ďalej ako šesťkilogramové). Teda dokopy spadnú rýchlejšie, ako samotné šesťkilogramové. A to už vieme, že je rýchlejšie ako desaťkilogramové. Teda teleso, ktoré vzniklo ako spojené šesťkilogramové a štvorkilogramové teleso, padá rýchlejšie ako desaťkilogramové.

Máme na rovnakú otázku dve rôzne odpovede. Dostali sme paradox. Niečo nemôže byť v poriadku. Možnosti sú dve, buď je chyba v uvažovaní (to nie je náš prípad – ak si to myslíte, nájdite ju) alebo v predpokladoch. Katkina teória gravitácie teda jednoducho nefunguje. Smutný príbeh.

Premyslite si, že úplne rovnako by sa dalo vyvrátiť to, že ťažšie telesá padajú rýchlejšie. Všetky telesá teda musia padať vo vákuu rovnako.