Fyzikálny korešpondenčný seminár
8. ročník, 2014/2015
UFO, KTFDF FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava
e-mail: otazky@fks.sk web: http://ufo.fks.sk

Vzorové riešenia 1. kola zimnej časti 2014/2015

1.1 Budík, budíček[1] (opravoval Baklažán)

Jurko si nastavoval budík na mobil. A každé ráno meškal do školy, lebo si ho odložil o päť minút aspoň desaťkrát. Ale s tým je teraz koniec. Na narodeniny dostal pekelne presný starý ručičkový budík, ktorý príšerne drnčí a budenie sa odložiť nedá. Prvá vec, ktorú si ráno počas rinčania na budíku všimol, boli ručičky. Minútová bola presne kolmá na hodinovú.

Kedy sa Jurko mohol zobudiť na rinčanie budíka? Nájdite všetky časy, kedy budú ešte ručičky zvierať uhol 90°. Koľko ich bude za deň?

Na začiatok by bolo najlepšie popísať, ako rýchlo sa hýbu ručičky. Pri veciach, ktoré sa hýbu priamočiaro nás preto zaujíma ich rýchlosť. Ručičky budíka sa však iba otáčajú okolo stredu. Preto nás bude zaujímať iná veličina, *uhlová rýchlosť*. Táto veličina nám hovorí, o aký uhol sa ručička (alebo akékoľvek otáčajúce sa teleso) otočí za nejaký čas. Vzorec na výpočet uhlovej rýchlosti je teda veľmi podobný tomu na výpočet klasickej rýchlosti, s ktorou sme sa už stretli:

$$\omega = \frac{\alpha}{t}\,,$$

kde ω je uhlová rýchlosť a α je uhol, o ktorý sa dané teleso otočí za čas t. Jednotkou uhlovej rýchlosti teda nebude meter za sekundu, ale napríklad stupeň za sekundu.[2]

Hodinová ručička urobí celú otočku o 360° raz za 12 hodín, teda jej uhlová rýchlosť je

$$\omega_\mathrm{h} = \frac{360^\circ}{12\,\mathrm{h}} = 30^\circ/\mathrm{h}\,.$$

Minútová ručička sa otočí o 360° raz za hodinu, teda jej uhlová rýchlosť je

$$\omega_\mathrm{m} = 360^\circ/\mathrm{h}\,.$$

Kedy bude minútová ručička kolmá na hodinovú? Vieme, že minútová ručička postupne odbieha od hodinovej, až kým ju nepredbehne o kolo. Potom ju začne odbiehať znovu, až kým ju znovu nepredbehne, atď. Počas tohto odbiehania sú na seba ručičky kolmé, keď je minútová 90° *pred* hodinovou a keď je 90° *za* hodinovou (teda môžeme povedať, že 270° pred hodinovou). Najprv sa pozrime, za aký čas predbehne minútová ručička hodinovú o kolo (ak začínajú otočené rovnakým smerom).

Čas, ktorý hľadáme, označme t_1. Vieme, že za čas t_1 sa hodinová ručička otočí o uhol $\alpha_\mathrm{h} = \omega_\mathrm{h} t_1$ a minútová o uhol $\alpha_\mathrm{m} = \omega_\mathrm{m} t_1$. Keďže minútová mala prejsť o $\beta = 360^\circ$ viac, musí zároveň platiť

[1] http://youtu.be/Cj0ZCrKwqHY

[2] Pre fajnšmekrov: základnou jednotkou uhlovej rýchlosti je radián za sekundu. Radián je základná jednotka uhla, π radiánov je 180 stupňov, teda $1\,\mathrm{rad} \approx 57{,}3^\circ$.

Seminár podporujú:

$$\alpha_\mathrm{m} - \alpha_\mathrm{h} = \beta\,.$$

Dosadíme za α_h a α_m a dostaneme

$$\omega_\mathrm{m} t_1 - \omega_\mathrm{h} t_1 = \beta\,.$$

Po krátkej úprave tak dostaneme hľadaný čas

$$t_1 = \frac{\beta}{\omega_\mathrm{m} - \omega_\mathrm{h}} = \frac{360^\circ}{360^\circ/\mathrm{h} - 30^\circ/\mathrm{h}} = \frac{360^\circ}{330^\circ/\mathrm{h}} = \frac{12}{11}\,\mathrm{h}\,.$$

Minútovej ručičke teda trvá 12/11h, kým predbehne hodinovú o kolo. Vieme, že ručičky ukazujú rovnakým smerom o polnoci a práve sme zistili, že od vtedy aj pravidelne každých 12/11 h. Na to, aby boli ručičky na seba kolmé, musí minútová ručička ešte odbehnúť od hodinovej o 90°, resp. o 270°. Čas, za ktorý minútová ručička odbehne od hodinovej o 90° označme t_2 a čas, za ktorý od nej odbehne o 270° označme t_3. Oba tieto časy môžeme vypočítať podľa rovnakého vzorca, ako t_1 (keďže ide o rovnaký dej):

$$t_2 = \frac{90^\circ}{360^\circ/\mathrm{h} - 30^\circ/\mathrm{h}} = \frac{90^\circ}{330^\circ/\mathrm{h}} = \frac{3}{11}\,\mathrm{h}\,,$$
$$t_3 = \frac{270^\circ}{360^\circ/\mathrm{h} - 30^\circ/\mathrm{h}} = \frac{270^\circ}{330^\circ/\mathrm{h}} = \frac{9}{11}\,\mathrm{h}\,.$$

Minútová ručička teda bude 90° pred hodinovou vždy 3/11 h po okamihu, keď ručičky ukazujú rovnakým smerom, teda prvý raz to bude 3/11 h po polnoci a potom pravidelne každých 12/11 h. Deň má 24 hodín, teda takáto situácia nastane

$$\frac{24\,\mathrm{h}}{12/11\,\mathrm{h}} = 22\text{-krát denne.}$$

Podobne situácia, keď je minútová ručička 270° pred hodinovou nastane prvý raz 9/11 h po polnoci a potom každých 12/11 h, dokopy 22-krát denne. Spolu je teda 44 časov, keď sú hodinová a minútová ručička na seba kolmé.

1.2 Mliečko vo fľaši (opravovala Denda, vzorák Peťo S.)

Mama balieva Enke na desiatu vianočku s maslom a medom a na pitie jej dáva domáce mliečko. Mlieko jej vždy naleje do sklenenej fľaše ešte kým je horúce, a potom ho s ľahkosťou uzavrie. Avšak keď sa chce Enka v škole už vychladnutého mliečka napiť, nie a nie otvoriť fľašu, a tak si musí volať na pomoc siláka Aďa. Ten sa ako skúsený fyzik zamyslel a prišiel na to, prečo má Enka problém s otváraním fľaše. No nepovedal jej to, aby na ňu mohol robiť naďalej dojem. Tak jej teda vysvetlite aspoň vy, prečo jej nejde otvoriť fľašu s mliečkom.

Ako vyplýva zo zadania príkladu, mlieko sa ochladilo. Spolu s mliekom sa taktiež ochladil vzduch, ktorý sa vo fľaši nachádzal.[3] Práve ochladenie vzduchu má na svedomí ďalšie zmeny, ktoré sa udiali. To, že aké nám hovorí stavová rovnica ideálneho plynu[4]

$$pV = nRT\,,$$

[3] Ak sa zníži teplota znamená to, že molekuly v látke spomalili, pretože teplota je iba makroskopickým prejavom pohybu molekúl. Čím sa molekuly v látke pomalšie hýbu, tak tým má látka nižšiu teplotu.

[4] Ideálny plyn je termín pre plyn, v ktorom je objem molekúl zanedbateľný a molekuly na seba nepôsobia žiadnymi silami. V skutočnosti žiaden plyn nie je úplne ideálny, no vlastnosti reálnych plynov sa od toho ideálneho veľmi nelíšia. Čo je hlavné, výpočty s ideálnym plynom sú oveľa jednoduchšie.

ktorá popisuje závislosť troch stavových veličín: tlaku, objemu a termodynamickej teploty (v kelvinoch), látkového množstva n (vyjadrujúceho počet molekúl v plyne) a nemennej plynovej konštanty R.

Z rovnice vidíme, že ak zachováme látkové množstvo[5] a objem, ktorý sa síce zmení, no len nepatrne, tak znížením teploty spôsobíme zníženie tlaku a naopak.

A prečo to tak funguje? Predstavme si, že nezmeníme objem. Znížením teploty sa zníži rýchlosť molekúl. Mohli by ste si povedať, že to nemá nič s tlakom, avšak keď molekula vrazí do steny, z tretieho Newtonovho zákona vyplýva, že na seba budú so stenou istý čas pôsobiť rovnako veľkými silami opačného smeru. Molekuly plynu teda na steny nádoby pôsobia silou, vyvolávajú tlak. Vplyv rýchlosti si ukážeme na analógii vo „veľkom“ svete. Keď hodíme loptičku do steny najprv rýchlo, potom pomalšie, budeme vidieť, že pri pomalšom hode sa loptička pomalšie odrazí naspäť, no pritom čas odrazu je približne rovnaký. To znamená, že loptička a stena na seba museli pôsobiť menšou silou. A tak je to aj s molekulami, ak sa zmenší ich rýchlosť, zmenší sa aj sila, ktorou pôsobia na steny nádoby, čiže ak sa zmenší teplota, zmenší sa aj tlak.

Výsledný vtip je teda v tom, že kým sila, ktorou plyn pôsobí na uzáver fľaše zvnútra sa zmenší, sila, ktorou bude na uzáver pôsobiť vonkajší vzduch sa prakticky nezmení. Jeho tlak, teplota a objem sa menia len nepatrne. Nastane teda nerovnováha síl v prospech tej, ktorá na uzáver pôsobí zhora. Výslednica síl teda bude smerovať do fľaše a bude uzáver pritláčať k hrdlu fľaše. To je dôvod, prečo sa uzáver po vychladnutí mlieka ťažšie otvára.

1.3 Fúúúúúúú (opravovala Enka, vzorák Paťo)

Zaujímalo vás niekedy, akou rýchlosťou lieta vyfukujúci sa balón? Áno? Tak to sme na jednej vlne. Natiahnite si vodorovne lanko pozdĺž celej miestnosti a navlečte naň kúsok slamky. Na slamku pripevnite balón a nafúkajte ho. Potom ho pustite, nechajte ho letieť a zmerajte jeho priemernú rýchlosť. Experiment opakujte aspoň 10-krát, fotograficky ho zdokumentujte a napíšte, kde mohli nastať chyby.

Skôr, ako sme sa pustili do merania, sme si poctivo pripravili aparatúru a trochu sme sa s ňou „pohrali“. A prečo aj nie, vyskúšať si, ako niečo funguje (alebo nefunguje) je často veľmi užitočné.

My sme napríklad zistili, že experiment oveľa lepšie funguje, keď je lanko, v našom prípade obyčajná tenká niť na šitie, poriadne napnuté. Preto sme jeden koniec nite uviazali napevno, druhý koniec bol prevesený cez okennú kľučku a napínaný tiažou asi 450 g fľaše s vodou. Tiež sme zistili, že experiment lepšie funguje, keď lanko nie je zavesené vodorovne, ale veľmi slabo naklonené. Mierny náklon pomáha balóniku prekonávať trenie. A nakoniec sme zistili, že balónik lieta lepšie, keď je o nitku prichtený nie cez slamku, ale cez dva oblúkové úchyty z lepiacej pásky.

Keď sme boli s naším experimentálnym usporiadaním spokojní, pustili sme sa do merania. Na úvod sme zmerali, akú dlhú dráhu bude balón prekonávať: $d = (460 \pm 5)$ cm. Číslo ± 5 cm vyjadruje *nepresnosť* merania. To znamená, že sme síce namerali 460 cm, ale skutočná dĺžka dráhy d mohla byť kľudne až o 5 cm menšia alebo väčšia.

[5] Ktoré aj zostane zachované, lebo molekuly vzduchu nemajú z nádoby kam utiecť

Obr. 1: Fotografia z merania

Potom sme nafúkali balónik, koniec sme uchytili kancelárskou sponkou a balónik sme pripevnili k nitke. Po uvoľnení sponky balónik okamžite vyštartoval na testovaciu dráhu. Čas, za ktorý balónik prešiel dráhu d sme merali obyčajnými stopkami. Meranie sme opakovali 10-krát, a to 5-krát pre zelený a 5-krát pre modrý balónik. Tak si môžeme jednoducho overiť, či má farba gumy vyplv na jej pružné vlastnosti a teda na rýchlosť balónika. Výsledky sme zapísali do tabuľky.

č. merania	1	2	3	4	5	priemer
$t_{\text{zelený}}/\,\text{s}$	1,48	2,39	3,98	2,81	2,72	2,50
$t_{\text{modrý}}/\,\text{s}$	2,37	2,39	2,20	2,88	2,30	2,43

Pre tieto dva časy vypočítame podľa vzorca $v = d/t$ rýchlosť balóniku. Nezabudneme premeniť $460\,\text{cm} = 4{,}6\,\text{m}$, čím dostávame rýchlosti

$$v_{\text{zelený}} = 1{,}84\,\text{m/s}\,, \qquad v_{\text{modrý}} = 1{,}89\,\text{m/s}\,.$$

Síce máme výsledok, no stále nevieme, ako veľmi je presný. Bez tohto údaju sa fyzici veru nezaobídu, pretože netušia, ako veľmi môžu svojmu meraniu dôverovať. Chyba rýchlosti bude závisieť na tom, ako presne sme odmerali dráhu d (to už máme) a čas t. Chybu času môžeme odhadnúť na približne $0{,}2\,\text{s}$ – to je totiž tzv. reakčná doba bežného človeka.

Aby sme dostali predstavu, aké veľké sú chyby merania d a t, prepočítame si ich na *relatívne* chyby. To znamená, že chybu vydelíme nameranou priemernou hodnotou. Relatívne chyby značíme gréckym písmenom δ (delta):

$$\delta_d = \frac{5\,\text{cm}}{460\,\text{cm}} = 1{,}1\%\,, \qquad \delta_{\text{zelený}} = \frac{0{,}2\,\text{s}}{2{,}50\,\text{s}} = 8{,}0\%\,, \qquad \delta_{\text{modrý}} = \frac{0{,}2\,\text{s}}{2{,}43\,\text{s}} = 8{,}2\%\,.$$

Z tohto výsledku vidíme, že oveľa „vážnejšie“ je nepresné meranie času, pretože jeho relatívna chyba je asi 8-krát väčšia. Rozumné je potom očakávať, že podobne nepresná bude tiež vypočítaná rýchlosť.

Nie je vôbec ťažké si dopočítať, aké musia byť nepresnosti rýchlostí, aby ich relatívne chyby boli 8,0%, respektíve 8,2%:

$$v_{\text{zelený}} = (1{,}84 \pm 0{,}15)\,\mathrm{m/s}\,, \qquad v_{\text{modrý}} = (1{,}89 \pm 0{,}15)\,\mathrm{m/s}\,.$$

Pre rôzne balóniky sme dostali dva rôzne výsledky, čo by mohlo znamenať, že zelená guma má o trochu inú pružnosť, ako modrá. Ak sa ale lepšie zadívame, tento maličký rozdiel je dokonca menší ako nepresnosť oboch meraní. Je teda pravdepodobné, že rozdielne hodnoty boli spôsobené iba nepresným meraním (hlavne času). Závislosť pružnosti gumy na farbe sme teda jednoznačne nezistili.

Ďalšie nepresnosti v meraní mohli byť spôsobené trením úchytu o nitku. Iné spôsoboval fakt, že balónik nebol vždy nafúkaný na úplne rovnaký objem. Istý vplyv mohlo mať tiež to, že po viacerých štartoch prestal byť balónik tak pružný, ako na začiatku. Aj preto bolo dobré používať viac balónov, ako jeden.

1.4 Vesmírna (opravoval Marek)

Jerguša prepadli v spánku Marťania. Šteklili ho, zjedli mu všetku čokoládu a ešte mu aj povedali, že zajtra dôjdu zas. Postavil si teda kanón, ktorým bude ostreľovať Mars cez deň. Na navigáciu striel ale potrebuje vedieť uhol Zem – Slnko – Mars. Ku kanónu postavil aj rádiosatelit a odoslal rádiovú vlnu smerom na Mars o 11:45 a išiel si uvariť špagety. Za pár minút, teda o 12:02 mu satelit zapípal, že zaznamenal odrazený jeho signál od Marsu. Jerguš do seba vtiahol poslednú špagetu a zistil, že netuší, ako z týchto údajov zistiť potrebný uhol. Viete ho určiť vy? Kľudne si pomôžte rysovaním.

Polomer dráhy Zeme je 1 AU, polomer dráhy Marsu je 1,43 AU. Jedna astronomická jednotka (AU) je 150 miliónov kilometrov. Predpokladajte, že dráhy planét ležia v jednej rovine, sú kruhové a planéty sa počas Jergušovho merania pohnú o zanedbateľnú vzdialenosť. Rýchlosť rádiových vĺn je rýchlosť svetla, teda 300 000 km/s.

V prvom rade vypočítame vzdialenosť Zeme a Marsu, ktorú si označíme ako s. Jerguš meral čas od 11:45 do 12:02, čo je 17 min. Zároveň vieme, že vlna doletela na Mars, odrazila sa a letela tú istú vzdialenosť na Zem. Takto prešla vzdialenosť $2s$ za 17 min, tj. vzdialenosť s preletela za 8,5 min.

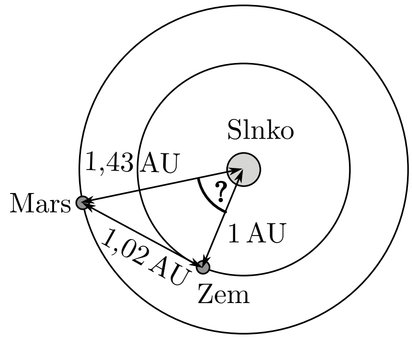
Keďže sa signál šíril konštantnou rýchlosťou, vzdialenosť planét vypočítame podľa vzorca $s = vt$, kde s je vzdialenosť planét, $v = 300\,000\,\mathrm{km/s}$ je rýchlosť šírenia vlny a $t = 8{,}5\,\mathrm{min} = 510\,\mathrm{s}$ je čas, ktorý vlna potrebovala na prejdenie od Zeme k Marsu. Po dosadení zisťujeme

$$s = vt = 300\,000\,\mathrm{km/s} \cdot 510\,\mathrm{s} = 153\,000\,000\,\mathrm{km} = 1{,}02\,\mathrm{AU}\,.$$

Na konci sme zmenili jednotku vzdialenosti z metra na tzv. *astronomickú jednotku* alebo značkou AU.[6] 1 AU je definovaná ako vzdialenosť Slnko – Zem. Jej presná hodnota je 149 597 871 km, pričom nám stačí jej zaokrúhlená hodnota 1 AU = 150 000 000 km.

Zo zadania poznáme vzdialenosti Zem – Slnko, Slnko – Mars a teraz sme vypočítali vzdialenosti Zem – Mars. Všimnime si, že tieto vzdialenosti tvoria trojuholník so stranami 1,02 AU, 1 AU a 1,43 AU ako na obrázku 2.

[6] Po anglicky ju nájdete pod názvom Astronomical Unit – odtiaľ pochádza aj jej značka.



Obr. 2: Trojuholník Slnko – Zem – Mars

Spomeňme si teraz, čo bolo naším cieľom. Mali sme nájsť uhol Zem – Slnko – Mars, ktorý leží oproti strane dlhej 1,02 AU. A hľa, máme rovno viacero možností!

Prvou možnosťou je ísť na to ručne – spomínaný trojholník si predsa vieme narysovať! Potom si zoberieme uhlomer a potrebný uhol odmeriame.

Ak náhodou však nemáme po ruke uhlomer, je tu druhá možnosť: narysujeme a odmeriame výšku kolmú napríklad na stranu Slnko – Mars a potrebný uhol vypočítame použitím funkcie sínus. Po narysovaní má táto výška približne 0,71 AU a uhol zistíme ako[7]

$$\sin\gamma = \frac{\text{protiľahlá}}{\text{prepona}}\,,$$

teda

$$\gamma = \arcsin\frac{0{,}71\,\mathrm{AU}}{1\,\mathrm{AU}} \doteq 45^\circ\,.$$

Do tretice všetko dobre, a tak si predstavíme aj tretí spôsob. Je založený na použití matematickej vety, ktorá skoro všetko vypočíta za nás. Volá sa kosínusová veta[8] a vyzerá takto

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma\,, \tag{1}$$

pričom a, b a c označujú dĺžky strán v trojuholníku, a γ je uhol, ktorý zvierajú strany a a b.

Kosínusová veta hovorí čosi podobné ako Pytagorova veta, no kosínusová platí pre *všetky* (teda nie len tie pravé) trojuholníky.[9]

Náš uhol ale nulový nie je. Preto si musíme najskôr vyjadriť zo vzorca (1) $\cos\gamma$. Získavame tým vzťah, do ktorého dosadíme hodnoty pre všetky tri strany a dostaneme veľkosť hľadaného uhlu

$$\cos\gamma = -\frac{c^2 - b^2 - a^2}{2ab} = \frac{2{,}0045}{2{,}86} \qquad \Rightarrow \gamma = \arccos\frac{2{,}0045}{2{,}86} \doteq 45{,}5^\circ\,.$$

[7] Z UFOčebnice vieme, že sínus vypočítame ako pomer dĺžok protiľahlej strany a prepony, čiže v našom prípade výšky na stranu Slnko – Mars a strany Slnko – Zem. Toto číslo dáme do kalkulačky a stlačíme tlačidlo $\boxed{\sin^{-1}}$, teda arkus sínus (arcsin), ktorý nám vypočíta z daného sínusu uhol.

[8] Podrobnejšie vysvetlenie a zdôvodnenie toho, ako funguje kosínusova veta najdete napríklad na stránke `http://sk.wikipedia.org/wiki/Kosínusová_veta`.

[9] Všimnime si, že ak za γ dosadíme 90° (čo by znamenalo, že by bol trojuholník pravouhlý, potom $\cos 90^\circ = 0$ a člen $-2ab\cos\gamma$ je nulový, a teda nedostávame nič iného ako Pytagorovu vetu!

Ako vidíte, uhol sa dá získať rôznymi spôsobmi, od priameho narysovania až po výpočet s kosínusovou vetou. Najpresnejší výsledok sme získali, samozrejme, použitím kosínusovej vety, vďaka tomu, že sme nemuseli nič rysovať. Rysovanie je vo všeobecnosti omnoho nepresnejšie ako výpočet.

Uhol Zem – Slnko – Mars má veľkosť $\gamma = 45{,}5°$.

1.5 Utopená nafukovačka (opravovala Jarka)

Dušanovi bolo raz teplo, a tak sa išiel kúpať. Požičal si od Janky nafukovačku a čľup do vodičky. No zistil, že je mu smutno, tak zavolal Tinke a tá sa k nemu pripojila spolu s Tinou, Baklažánom a Dendou. Teraz by ich ale zaujímalo, či ich nafukovačka udrží.

Vypočítajte, koľko najviac ľudí udrží nafukovačka tak, aby sa ešte celá neponorila do vody. Potrebné hodnoty, ako napríklad objem vzduchu v nafukovačke, odhadnite.

Na sústavu nafukovačky a ľudí pôsobia dve sily, gravitačná a vztlaková. Práve vztlaková sila kompenzuje pôsobenie gravitačnej, ktorá sústavu ponára. S nárastom gravitačnej sily, bude narastať aj ponor nafukovačky a tým pádom aj vztlaková sila, ktorá bude udržiavať sústavu v stave rovnováhy. Toto sa bude diať až kým sa celá nafukovačka neponorí a vztlaková sila nedosiahne svoje maximum. Vezmime si teda hraničnú situáciu, keď už aj minimálny nárast gravitačnej sily spôsobí konečné potopenie nafukovačky. Obe pôsobiaciace sily sú v rovnováhe

$$F_{\mathrm{vz}} = F_g\,.$$

Vyjadrením vztlakovej sily z Archimedovho zákona dostaneme rovnicu

$$V\rho g = mg\,,$$

kde V je objem nafukovačky, ρ je hustota vody, v ktorej nafukovačka pláva, m vyjadruje hmotnosť celej nafukovačky aj so záťažou na nej, a klasicky, g je tiažové zrýchlenie.

Zo zadaných veličín nepoznáme objem nafukovačky a hmotnosť celej sústavy. Pre ľahší výpočet objemu predpokladajme, že nafukovačka má tvar kvádra. Jej šírku odhadneme na 80 cm, dĺžku 180 cm a hrúbku na 15 cm. Samozrejme, nafukovačky majú rôzne rozmery, tak sme si vzali takú priemernú. Z týchto údajov už pohodlne vypočítame objem nafukovačky $V = 0{,}216\,\mathrm{m}^3$. Ak uvažujeme, že voda má hustotu $1\,000\,\mathrm{kg/m}^3$, tak po dosadení do rovnice dostaneme, že nafukovačka unesie hmotnosť $m = 216\,\mathrm{kg}$.

Sústava sa skladá z nafukovačky a ľudí. Jeden mladý človek má hmotnosť približne $m_{\check{c}} = 65\,\mathrm{kg}$. Hmotnosť nafukovačky je malá oproti ľuďom, a preto ju môžeme zanedbať. Teraz už len musíme zistiť, koľko ľudí neprekročí hranicu maximálnej hmotnosti, takže to už iba jednoducho predelíme

$$n = \frac{m}{m_{\check{c}}} = \frac{216\,\mathrm{kg}}{65\,\mathrm{kg}} = 3{,}32\,.$$

Z toho už vidíme, že nafukovačka neunesie viac ako troch ľudí.

1.6 Ťažká práca (opravoval Jerguš G.)

Keď bol raz Samo v bani, skúsil si ťažkú prácu baníkov. Do ruky dostal lano a za úlohu vytiahnuť banský vozík hore rampou. Aby sa lano neroztrhlo, na vrchole rampy prechádzalo kladkou.

a) Akou vodorovnou silou F musí Samo ťahať lano, aby sa vozík začal pohybovať hore rampou?

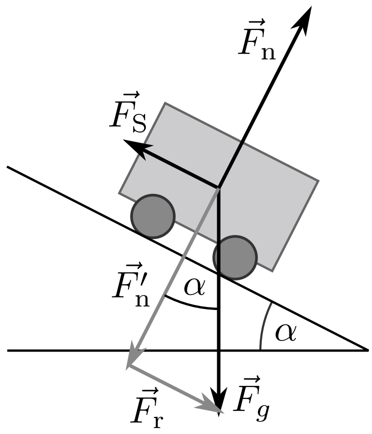
b) Aký koeficient šmykového trenia f musí byť medzi Samovými topánkami a podlahou v bani, aby sa Samovi pri jeho urputnej práci nešmyklo?

Vozík váži $100\,\mathrm{kg}$, Samo $70\,\mathrm{kg}$. Kolieska vozíka sú dobre naolejované a teda otáčajú sa bez trenia. Uhol, ktorý zviera rampa s vodorovným smerom, je $\alpha = 20°$.

Časť a) Aby sa vozík začal pohybovať rovnomerným priamočiarym pohybom hore rampou, sily ktoré naň pôsobia, musia byť v rovnováhe. Ak by sila, ktorá ťahá vozík hore bola väčšia, vozík by zrýchľoval, no my chceme vypočítať hraničnú silu, potrebnú na rovnomerný posun vozíka nahor.

Na vozík pôsobí gravitačná sila F_g, normálová sila podložky F_n a sila, ktorou vozík ťahá Samo F_S. Sila F_S, ktorou pôsobí Samo na lano sa pozdĺž neho prenáša až na vozík, takže si môžeme posunúť pôsobisko až do ťažiska vozíka.

Najjednoduchší spôsob ako riešiť úlohu, je použiť trik spomenutý na konci učebného textu. Rozložíme gravitačnú silu F_g na zložku rovnobežnú s naklonenou rovinou F_r a na zložku kolmú na naklonenú rovinu F'_n.



Obr. 3: Prvý spôsob rozkladu síl

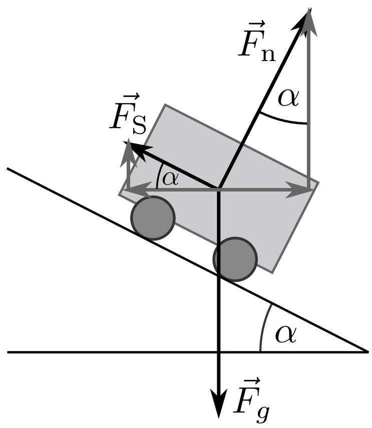
Rovnobežná zložka sa snaží o pohyb vozíka nadol, kolmá zložka pôsobí proti podložke. Z toho vidíme, odkiaľ sa vzala normálová sila F_n. Je to sila pevnosti podložky, ktorá vzniká ako reakcia na tlakovú silu vozíka na podložku, spôsobenú gravitáciou. Ako je každodenne vidieť, tieto dve sily pôsobia tak, že vozík ostáva na podložke a nepreborí sa cez ňu. Keďže na vozík pôsobia v tomto smere len tieto dve sily, môžme usúdiť, že F_n a F'_n majú opačný smer a rovnakú veľkosť, a teda sa navzájom rušia.

Rovnobežná zložka gravitačnej sily sa snaží posunúť vozík smerom dolu rampou. Tu ale prichádza do hry Samo, ktorý sa, naopak, snaží túto silu vyrovnať. Pôsobí teda silou rovnakej veľkosti, ale opačným smerom. Ako túto silu vypočítame? Rozkladom gravitačnej sily na zložky sme dostali pravouhlý trojuholník s uhlom α. Zo vzťahov, ktoré v pravouhlom trojuholníku platia, silu vieme vypočítať:

$$|F_\mathrm{S}| = |F_\mathrm{r}| = F_g \sin\alpha = 100\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} \cdot 0{,}342 \doteq 336\,\mathrm{N}\,.$$

O niečo komplikovanejšie sa úloha dala riešiť postupom z učebného textu, rozložením síl na vodorovné a zvislé zložky. Takéto riešenie je náročnejšie na úpravy rovníc a zvyčajne si vystačíte s predchádzajúcim postupom. Ale pre tých, ktorí sa úlohu snažili riešiť týmto spôsobom, ponúkame aj toto riešenie.

O niečo komplikovanejšie sa úloha dala riešiť postupom z učebného textu, rozložením síl na vodorovné a zvislé zložky. Takéto riešenie je náročnejšie na úpravy rovníc a zvyčajne si vystačíte s predchádzajúcim postupom. Ale pre tých, ktorí sa úlohu snažili riešiť týmto spôsobom, ponúkame aj toto riešenie.



Obr. 4: Druhý spôsob rozkladu síl

Sily F_n a F_S rozložíme na x-ové a y-ové zložky.

$$F_{\mathrm{n}x} = F_\mathrm{n} \sin\alpha\,, \qquad F_{\mathrm{S}x} = F_\mathrm{S} \cos\alpha\,,$$

$$F_{\mathrm{n}y} = F_\mathrm{n} \cos\alpha\,, \qquad F_{\mathrm{S}y} = F_\mathrm{S} \sin\alpha\,.$$

Zvislá zložka normálovej sily a Samovej sily sa vykompenzuje s gravitačnou silou

$$F_{\mathrm{n}y} + F_{\mathrm{S}y} = F_g\,,$$
$$F_\mathrm{n} \cos\alpha + F_\mathrm{S} \sin\alpha = mg\,.$$

Vodorovné zložky síl sa vykompenzujú navzájom

$$F_{\mathrm{n}x} = F_{\mathrm{S}x}\,,$$
$$F_\mathrm{n} \sin\alpha = F_\mathrm{S} \cos\alpha\,,$$

z tejto rovnice si ďalej vyjadríme F_n

$$F_\mathrm{n} = F_\mathrm{S} \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,.$$

Hodnotu F_n následne dosadíme do rovnice pre zvislé zložky

$$F_\mathrm{S} \frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha} + F_\mathrm{S} \sin\alpha = mg\,,$$
$$F_\mathrm{S} = \frac{mg}{\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha} + \sin\alpha}\,.$$

Tu by sa nám hodilo spoznať užitočnú identitu a to konkrétne[10]

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1\,,$$

ktorá platí pre ľubovoľné x. Teraz spravíme hlavný trik: rozšírime zlomok vo výsledku $\sin\alpha$.[11] Takto v menovateli dostaneme $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, a teda výsledok bude

$$F_\mathrm{S} = mg\sin\alpha = 336\,\mathrm{N}\,.$$

Aj týmto postupom sme dospeli k rovnakému správnemu výsledku.

Časť b) Pôsobenie síl je vždy vzájomné, keď Samo ťahá vozík silou F_S, tak aj vozík pôsobí na Sama rovnakou silou. Aby sa Samo nešmykol, trecia sila medzi Samovými podrážkami a podlahou musí byť rovná F_S, ktorou vozík pôsobí na Sama. Preto platí:

$$F_\mathrm{S} = F_\mathrm{t}\,.$$

Trecia sila je daná súčinom koeficientu šmykového trenia a normálovej sily, ktorá pôsobí na Sama, a v tomto prípade má hodnotu gravitačnej sily.

$$F_\mathrm{t} = fF_{\mathrm{S}g} = fm_\mathrm{S}g\,.$$

Následne vypočítame f:

$$f = \frac{F_\mathrm{t}}{m_\mathrm{S}g} = \frac{336\,\mathrm{N}}{70\,\mathrm{kg}\cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}} \doteq 0{,}5\,.$$

Súčiniteľ šmykového trenia musí byť aspoň 0,5.

[10]Odkiaľ sa to zobralo? Stačí si zobrať ľubovoľný pravouhlý trojuholník s preponou dĺžky 1 – jednotky neuvádzame, lebo môžu byť hocijaké. Pre takýto trojuholník platí Pytagorova veta, takže $a^2 + b^2 = 1$. Avšak, strany vieme vyjadriť ako sínusy a kosínusy, pričom prepona má stále dĺžku 1, a tak dostávame $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. (Namiesto α sa väčšinou používa x.)

[11]To znamená, že čitateľa aj menovateľa zlomku vynásobíme funkciou $\sin\alpha$.