Fyzikálny korešpondenčný seminár
8. ročník, 2014/2015
UFO, KTFDF FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava
e-mail: otazky@fks.sk web: http://ufo.fks.sk

Vzorové riešenia 2. kola zimnej časti 2014/2015

2.1 Bezpečná hrobka (opravoval Martin Majtán, vzorák Maťo G.)

Jerguša na dovolenke vo Vietname zaujali staré hrobky. Boli totiž strašne komplikované a museli spĺňať mnoho pravidiel. Hrobka mala jeden vchod so šírkou $2\,\mathrm{m}$ a vo vnútri práve jeden hrob s rozmermi $3\,\mathrm{m}\times4\,\mathrm{m}$. K hrobu sa mohli dostať ľudia, ktorí vchádzali cez vchod a vedeli sa pohybovať kadekoľvek, ak bola chodba široká aspoň $2\,\mathrm{m}$.

Cez vchod vchádzali do hrobiek aj zlí duchovia, ktorí sa chceli zmocniť tiel zosnulých. Našťastie, boli oproti ľuďom obmedzení – vedeli sa pohybovať len priamočiaro a odrážali sa od stien, podobne ako biliardové gule (nevedeli prechádzať cez steny). Navyše mali radi symetriu, a preto vchádzali do hrobky vždy cez stred jej vchodu (avšak pod rôznymi uhlami). Hrobky boli stavané tak, aby sa duchovia nevedeli v žiadnom prípade dostať k hrobom.

Navrhnite hrobku spĺňajúcu takéto požiadavky a popri tom použite čo najmenej kameňa. Použité množstvo kameňa taktiež spočítajte. Stavať môžete len steny zanedbateľnej hrúbky. Na postavenie jedného metra steny je treba $1{,}5\,\mathrm{t}$ kameňa.

Najlepšie riešenie dostane 3-bodový bonus.

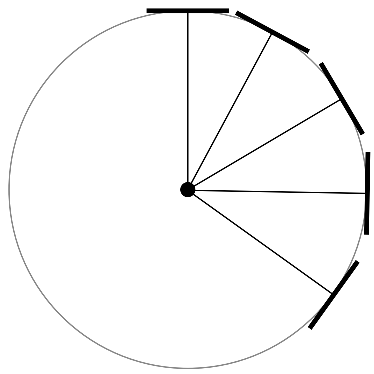
Na začiatok sa pozrime iba na pohyb duchov. Odrážajú sa od stien presne ako svetlo od zrkadiel. Pre lepšiu predstavu si teda môžeme nahradiť vchod bodovým zdrojom svetla v jeho strede (duchovia vždy vchádzajú tak, že prechádzahú stredom vchodu) a všetky steny nahradíme zrkadlami.

Podľa toho si teraz môžeme preformulovať zadanie úlohy: zrkadlá majú byť uložené tak, aby sa od nich svetlo svietiace zo stredu vchodu poodrážalo späť tam, odkiaľ aj prišlo, teda aby sa žiadne svetlo nedostalo k hrobu (inými slovami, aby pri hrobe vznikol tieň). Svetlo sa môže poodrážať aj viackrát, no pre jednoduchosť (a lepšiu kontrolu) sa obmedzíme len na riešenia, kde sa každý lúč svetla zo stredu vchodu po prvom odraze vráti naspäť tam, odkiaľ prišiel. To znamená, že ak sa svetlo vydá na ktorúkoľvek stranu, vždy narazí na stenu kolmú na jeho smer.

Ktorý tvar môže spĺňať takúto podmienku? Ak ste na to už prišli, pokojne môžete tento odsek preskočiť. Ostatní si skúste nakresliť niektoré (čím viac, tým lepšie) lúče bodového zdroja svetla a následne ku každému dokresliť aj stenu, od ktorej sa odrazí späť (teda stenu, ktorá je na daný lúč kolmá[1]). Bude to vyzerať približne tak, ako je to na obrázku 1. Na ňom sa nám už začína objavovať hľadaný tvar steny, ktorým je kružnica so stredom v zdroji svetla.

[1]Ak nechápete súvislosť, predstavte si, že by zrkadlo nebolo kolmé na smer lúča. Ako určite viete, lúč sa odrazí podľa zákona odrazu, teda v tomto prípade iným smerom, než je ten, z ktorého prišiel. A to presne nechceme.

Seminár podporujú:

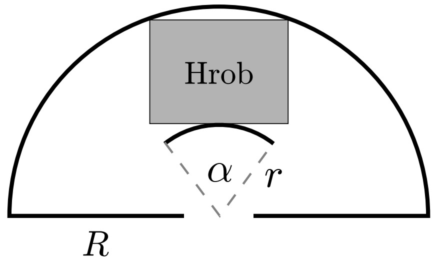


Obr. 1: Rovné čiary smerujúce od stredu sú svetelné lúče

Fajn, no má to rovno dva problémy. Prvým je, že zdroj svetla, ktorý mal byť pôvodne vchodom do hrobky, je v strede kružnice. Vchod do hrobky ale musí byť na jej okraji. Druhý problém je ten, že sme stále nikam neumiestnili hrob.

Oba problémy vieme, našťastie, elegantne vyriešiť – ak použijeme polkružnicu (stále so stredom v mieste zdroja svetla), pričom prázdnu časť nahradíme stenou s vchodom (pozrite sa na obrázok 2), tak bude prvý problém vyriešený. Hrob teraz umiesnime do hrobky a postavíme pred neho stenu, ktorá bude tiež časťou kružnice so stredom v zdroji svetla, ale bude mať menší polomer.

Ak sa vám toto zdalo zložité, zamyslite sa, že celé riešenie znázornené na obrázku 2 naozaj spĺňa podmienky v zadaní (čiarkované čiary a písmená si zatiaľ nevšímajte).



Obr. 2: Jednoduché riešenie

Teraz príde tá zradná otázka: koľko kameňa sme použili? Vonkajšia polkružnica bude mať obvod rovný polovici obvodu kružnice s rovnakým polomerom, teda

$$s_1 = \pi R\,.$$

Stena s vchodom bude mať celkovú dĺžku

$$s_2 = 2R - 2\,\mathrm{m}\,.$$

Vnútorná stena bude väčší problém. Označíme jej polomer ako r, no stále nevieme, ako určiť jej dĺžku. Vhodným spôsobom na popísanie sa ukazuje byť uhol α, ktorý zvierajú spojnice jej koncových bodov so zdrojom svetla (teda stredom kružnice, ktorej časťou je táto stena). Ďalej si uvedomíme, že ak by mal uhol α veľkosť $360°$, tak by sme hovorili o celej kružnici, a teda dĺžka našej časti je $\frac{\alpha}{360°}$ dĺžky z celej kružnice. Hľadaná dĺžka potom bude $\frac{2\alpha}{360°}\pi r$. Toto použijeme a získavame

$$s_3 = \frac{2\alpha}{360°}\pi r\,,$$

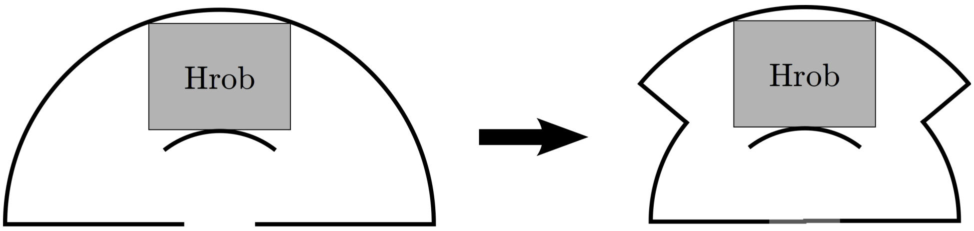
pričom celkový súčet je

$$s = s_1 + s_2 + s_3 = R(\pi + 2) - 2\,\mathrm{m} + \frac{2\alpha}{360°}\pi r\,.$$

Polomery R a r a uhol α sa dajú získať pomocou goniometrie, no najjednoduchšie je si situáciu buď narysovať, alebo nakresliť v programe a nájsť najmenšie rozmery tak, aby bola hrobka stále priechodná ľuďmi. Nám vyšli hodnoty $R = 5{,}9\,\mathrm{m}$, $r = 2{,}5\,\mathrm{m}$ a $\alpha = 76{,}2°$, čím sa dostávme k výsledku, ktorý už len prenásobíme hmotnosťou jedného metra kameňa a získame celkovú hmotnosť

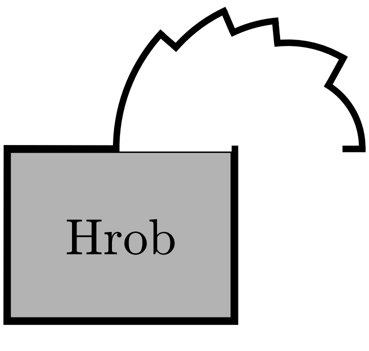
$$s \doteq 31{,}66\,\mathrm{m} \qquad \Rightarrow \qquad m \doteq 1{,}5\,\frac{\mathrm{t}}{\mathrm{m}} \cdot 31{,}66\,\mathrm{m} \doteq 47{,}5\,\mathrm{t}\,.$$

Skúsme to ale ešte zlepšiť! Všimnime si, že vľavo a vpravo na obrázku je veľa voľného a nevyužitého miesta. Ak by sme miesto vyčlenili z hrobky spôsobom ako na obrázku 3, ušetrili by sme nezanedbateľné množstvo kameňa. Dokonca, ak by sme vyčleňovali presnejšie, mohli by sme takto pokračovať aj naďalej, čím by sme sa postupne dostali k v podstate ľubovoľnému tvaru, ktorý by stále odrážal svetlo správnym spôsobom.



Obr. 3: Takýmto „vyčlenením“ sa zbavíme nepotrebného miesta a na oplátku ušetríme tony kameňa.

Ďalším zlepšením je neumiestniť hrob *do* polkružnice, ale *mimo* nej. Tým síce treba postaviť viac stien, no polomer polkružnice sa zmenší a vnútorný kružnicový výsek sa stane nepotrebným. Takto dospejeme k riešeniu ako na obrázku 4.



Obr. 4: Ešte lepšie riešenie

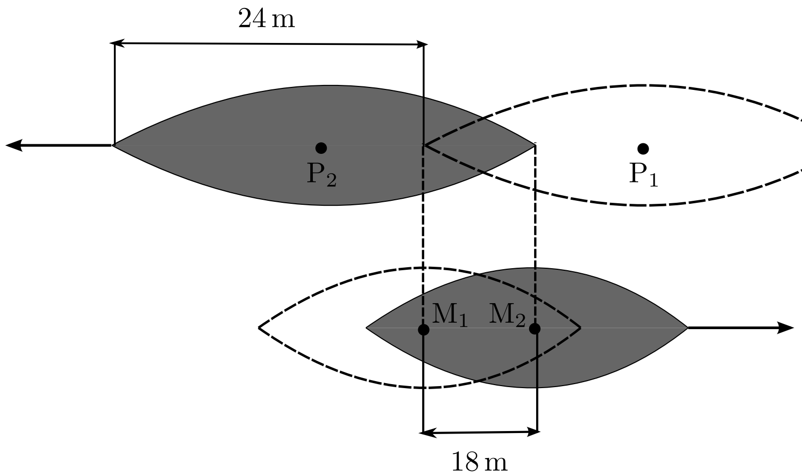
Dokonca, toto riešenie ani nie je optimálne, no lepšie tu už nebudeme ukazovať.

2.2 Námornícka[2] (opravoval Žaba)

Námorníci Paťo a Maťo sa na svojich plachetniciach vydali na plavbu okolo sveta. Začínali na rovnakom mieste, každý sa však vydal opačným smerom. Po týždňoch samoty sa stretli, ich plachetnice preplávali popri sebe a pokračovali ďalej. Obidvaja v tej chvíli stáli presne v stredoch ich plachetníc a plavili sa rovno oproti sebe. Paťo čakal, až kým začiatok Maťovej lode nebol pri ňom a v tom momente zapol stopky. Zastavil ich, až keď sa pri ňom ocitol koniec Maťovej lode. Nameral čas 5 sekúnd. Podobnú vec spravil aj Maťo, ale nameral 6 sekúnd. Námorníci naviac vedeli rýchlosti svojich plachetníc voči vode – Maťova išla rýchlosťou $3\,\mathrm{m/s}$ a Paťova rýchlosťou $4\,\mathrm{m/s}$. Paťa a Maťa by teraz zaujímalo, aké dlhé sú ich plachetnice. Pomôžte im to vypočítať!

Táto úloha bola pomerne jednoduchá a na celú situáciu existovalo viacero správnych pohľadov. Skúsime si teda dva z nich aj popísať. Počas celého riešenia si budeme predstavovať, že Maťova plachetnica pláva doprava a Paťova doľava.

Prvý spôsob Pokúsme sa najskôr vyrátať, aká dlhá je Paťova plachetnica. V momente, keď Maťo zapol stopky, bol začiatok Paťovej lode zarovno s Maťom (stredom jeho lode). Po 6 s bol zarovno s Maťom koniec Paťovej lode. O koľko metrov sa posunula Paťova loď? Ak použijeme známy vzťah na rátanie vzdialenosti s, ktorú prejdeme danou rýchlosťou v za čas t, $s = vt$, zistíme, že Paťova loď sa posunula o $4\,\mathrm{m/s} \cdot 6\,\mathrm{s} = 24\,\mathrm{m}$. To však ešte nie je konečná odpoveď, pretože počas toho sa hýbala aj Maťova loď. Tá prešla vzdialenosť $3\,\mathrm{m/s} \cdot 6\,\mathrm{s} = 18\,\mathrm{m}$ opačným smerom. Keď si túto situáciu zakreslíme ako na obrázku 5, ľahko zistíme, že Paťova loď meria $24\,\mathrm{m} + 18\,\mathrm{m} = 42\,\mathrm{m}$.



Obr. 5: Pohľad na plachetnice zhora

Druhý spôsob Pomocou druhého pohľadu na situáciu sa pokúsime vyrátať dĺžku Maťovej plachetnice. Tu si pomôžeme malým trikom. Namiesto toho, aby sme sa na celú situáciu pozerali ako nezainteresovaní diváci a započítavali pohyb oboch lodí, sa postavíme na loď vedľa Paťa.

[2] `http://youtu.be/xy_TfPdS6Xg`

Stojac na Paťovej lodi nemáme pocit, že sa pohybujeme, no zdá sa nám, že stojíme na mieste a hýbe sa len všetko okolo nás. Tento pocit ste už asi niekedy zažili v aute alebo vo vlaku. Predstavme si, že sedíme v aute, ktoré sa pohybuje rýchlosťou v_1. Nám sa ale zdá, že my stojíme a celá okolitá krajina sa hýbe *proti* smeru nášho pohybu rýchlosťou v_1. Ďalej si predstavme, že oproti nám, teda tiež proti smeru nášho pohybu, ide iné auto rýchlosťou v_2. Nám sa ale rýchlosť približovania druhého auta javí ako súčet $v_1 + v_2$.

Pozrime sa tiež na opačnú situáciu, keď nás druhé auto obchádza, teda ide rovnakým smerom ako my. Opäť, keď sa naň pozrieme, sa vôbec nepohybuje tak rýchlo, ako by sme čakali. Ono sa síce pohybuje rýchlosťou v_2 dopredu, no my sa však tiež posúvame rýchlosťou v_1 tým istým smerom. Preto sa nám zdá, že sa druhé auto pohybuje rýchlosťou iba $v_2 - v_1$. To naozaj napĺňa očakávanie z reálneho života, keď nás predbiehajúce autá len pomaly obídu a tie, ktoré idú oproti nám, iba presviština okolo s veľkou rýchlosťou.

Ale vráťme sa k plachetniciam. Paťo teda stojí uprostred svojej plachetnice a v priebehu 5 s okolo neho prejde Maťova loď. Akou rýchlosťou vzhľadom na Paťa sa táto loď pohybuje? Keďže lode idú opačným smerom, ich rýchlosti sa sčítajú, teda sa druhá loď pohybuje rýchlosťou 7 m/s. S týmto pozorovaním už nie je ťažké zistiť, že Maťova loď má dĺžku $7\,\mathrm{m/s} \cdot 5\,\mathrm{s} = 35\,\mathrm{m}$.

Ak si teraz spomenuté postupy vyskúšame aj na opačných lodiach (teda prvý na Maťovej a druhý na Paťovej), dostaneme rovnaký výsledok. Vidíme teda, že napriek tomu, že sme použili rozdielne pohľady, oba nás doviedli k správnemu riešeniu. Druhý spôsob riešenia je vo fyzike veľmi dôležitý. Takýto spôsob sa totiž volá *zmena vzťažnej sústavy* a nachádza svoje uplatnenie v mnohých fyzikálnych úlohách, aj tam, kde kreslenie obrázkov nie je nápomocné.

2.3 Vrh guľou (opravoval Maťo G., vzorák Mišo H.)

Klárika mala minulý týždeň v škole hodinu telesnej, na ktorej sa učili vrhať guľou. Bola ale smutná z toho, že jej to príliš nešlo, a preto sa rozhodla zistiť, kde robí chybu. Všimla si, že keď hádže guľu pod rôznymi uhlami, tak doletí rôzne ďaleko. Preto si povedala, že asi nehádže pod tým správnym uhlom. Vašou úlohou je odmerať závislosť doletu gule (loptičky) od uhla, pod ktorým je hádzaná, ak Klárika hádže guľu stále tou istou počiatočnou rýchlosťou. Následne spravte graf závislosti doletu od uhlu a z grafu nakoniec určte ten správny uhol, pod ktorým doletí guľa najďalej.

U seba doma si môžete Kláriku nahradiť pevnou doskou. Guľu budete púšťať z určitej (stále tej istej) výšky na dosku, ktorú budete rôzne nakláňať (vytvoríte takto naklonenú rovinu) a tým meniť uhol, pod ktorým sa guľa odrazí.

Doska na odrážanie Použili sme drevenú, nelakovanú poličku dlhú 70 cm. Jeden koniec sme podopierali rôznym počtom kníh, aby sme dosiahli rôzne naklonenia. Uhol tohto naklonenia môžeme odmerať jednoducho pomocou uhlomera, alebo trochu kompikovanejšie, no presnejšie: po zmeraní dĺžky dosky L odmeriame ešte prevýšenie jej konca h. Uhol naklonenej roviny potom zistíme pomocou kalkulačky ako $\sin^{-1}(h/L)$. O tom, čo je sínus a čo znamená $\sin^{-1}$ si môžete prečítať v prvom dieli tohtoročnej UFOčebnice.

Gulička Použili sme štandardnú ping-pongovú loptičku a priemerom 40 mm a hmotnosťou 2,7 g. Skákalka či tenisová lopta by fungovali tiež, no dôležité je, aby loptička nebola príliš ťažká (mohla by hýbať doskou) a aby sa dobre odrážala od dosky.

Spúšťanie loptičky V istej výške nad naklonenou rovinou sme si urobili značku, skadiaľ sme spúšťali všetky loptičky. Odrazovú dosku sme vždy nastavili tak, aby sa loptička odrážala 70 cm pod touto značkou. To sa dá ľahko overiť pomocou 70 cm dlhého špagátika so závažím na konci.

Meranie doletu Ako doletovú plochu sme použili ďalšiu poličku. Túto sme položili vodorovne na ďalšie knihy tak, aby bola v rovnakej výške ako bod, od ktorého sa loptička odrážala.

Ako odmerať, kam loptička dopadla? Jedna možnosť je „od oka“ či „od ucha“. Budeme pozerať a počúvať a snažiť sa zapamätať si bod dopadu. Je to však značne nepresné a pracné.

Inou možnosťou je nahrávať loptičku na video. Kameru položíme zboku, blízko dopadovej plochy umiestnime meter, každý pokus zaznamenáme a preletenú vzdialenosť odčítame z videa. Video ale musí byť kvalitné, loptička letí rýchlo – ideálne je urobiť spomalený záber. Miesto videa sa dá tiež urobiť fotografia s dlhou uzávierkou.

Tretia možnosť je však technicky najjednoduchšia: na dopadovú plochu rozsypeme tenkú vrstvu kryštálového cukru alebo inej sypkej látky. Loptička pri dopade na takúto plochu zanechá svoju stopu.

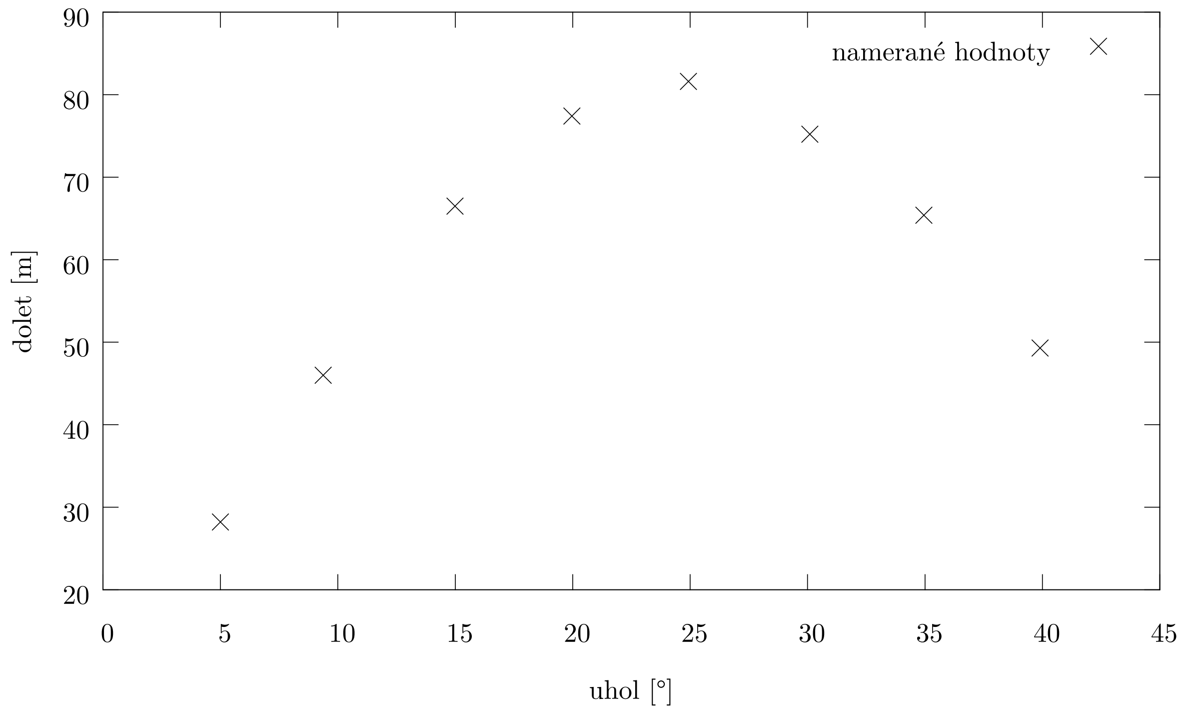
Meranie Meranie prebiehalo pomocou tretej možnosti. Loptičku sme pustili na dosku 5-krát po sebe, odmerali sme polohu všetkých kráterov a vrstvu cukru sme zahladili a dosypali.

Takto sme dolety merali s nepresnosťou 1 cm. To hlavne kvôli tomu, že loptičku sme spúšťali rukou a skutočný bod odrazu mohol byť kúsok vedľa zamýšľaného. Ďalšie chyby merania vznikli napríklad kvôli nerovnostiam dosky, či rotácii loptičky.

Realizácia Postup merania sme popísali, hor sa merať! Pre každý z uhlov náklonu poličky 5°, 10°, … , 40° sme namerali dolet 10-krát. Namerané hodnoty pre každý z uhlov sme spriemerovali a výsledky sme napísali do tabuľky:

Uhol α [°]	5	10	15	20	25	30	35	40
Priemerný dolet [cm]	28,2	46,0	66,5	77,4	81,6	75,2	65,4	49,3

Závislosť doletu na sklone dosky znázornená na grafe:



Obr. 6: Graf závislosti doletu od uhla

Z grafu môžeme usúdiť, že najlepší dolet dostaneme pre naklonenie dosky rovné približne $\alpha = 25°$. Ako tento uhol súvisí s uhlom, pod ktorým hádže Klárika?

Ak by sa uhol odrazu rovnal uhlu dopadu, uhol (do zvislice) pod ktorým loptička opúšťa dosku, by bol rovný dvojnásobku sklonu dosky, teda 2α (nakreslite si). Uhol, ktorý zviera smer loptičky s vodorovnou priamkou, dostaneme ako doplnok uhla 2α do $90°$, teda $90° - 2 \cdot 25° = 40°$. Keďže nemeriame úplne presne, môžme povedať, že najlepší uhol hodu je niekde medzi $30°$ a $50°$.[3]

Ak by sme chceli byť naozaj presní, museli by sme uvažovať aj fakt, že loptička sa odrazí trochu inak, ako podľa zákona odrazu. Časť energie sa totiž spotrebuje na vibrácie a deformáciu dosky a časť sa stratí v podobe tepla. Náš experiment teda zodpovedá Klárikinym hodom iba približne.

Hodnotenie: Body sa dali získať za popísanie meracieho zariadenia, správne merania, graf a za uvedenie chýb v meraní (tým myslíme vymenovanie a popis javov, ktoré spôsobovali v meraniach chybu). Ďalej sme strhávali body za neprerátanie uhlov medzi uhlom sklonu dosky a skutočným uhlom, pod ktorým sa loptička nakoniec voči zemi odrazila.

2.4 Medziplanetárny milovník (opravovala Enka)

Beznádejný romantik Samko cez deň trhá lupienky margarét, po večeroch pospevuje serenády a po nociach . . . po nociach sa predsa necháva unášať krásou nočnej oblohy! Miluje hviezdy, lebo sú ženského rodu. A z planét má samozrejme najradšej krásnu Venušu. Minule ju videl:

a) na západe počas západu Slnka, 26 stupňov nad obzorom,

[3] Výpočet so zanedbaním odporu vzduchu ukazuje, že optimálny uhol by mal byť presne 45°. Práve odpor vzduchu má za následok, že optimálny uhol je v skutočnosti o trochu menší.

b) na východe pri východe Slnka, 46 stupňov nad obzorom,

c) na severovýchode o polnoci, 32 stupňov nad obzorom.

Z lásky k nej by si chcel vyznačiť jej polohu pri obehu okolo Slnka na tomto obrázku v každom z prípadov a), b) a c):

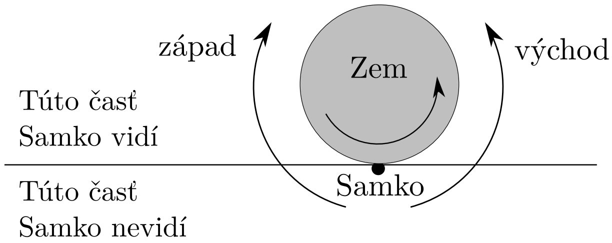
Samko naviac žije vo svete s dosť zjednodušenou slnečnou sústavou. Venuša aj Zem obiehajú okolo Slnka v jednej rovine po kružniciach a os rotácie Zeme je kolmá na túto rovinu. Samko navyše býva na rovníku. Vzdialenosť Venuše od Slnka je 0,72-násobok vzdialenosti Zeme od Slnka.

Zakreslite Samkovi do jeho obrázku polohu Venuše. Obrázok je nakreslený z pohľadu, pri ktorom vidíme severnú pologuľu Zeme. Za správne nakreslenie polohy dostanete jeden bod, za vysvetlenie, ako ste na to prišli, dostanete ďalšie dva.

Najprv si musíme uvedomiť, čo všetko v danom okamihu z povrchu Zeme vidíme. Výhľad do šíreho vesmíru nám zacláňa práve Zem, na ktorej stojíme. Preto lúče svetla (nie nutne zo Slnka), ktoré sa dostanú do nášho oka, nemôžu predtým preťať zemský povrch.

Najskôr sa naučíme, aké vlastnosti má jedna špeciálna priamka, *dotyčnica*. Dotyčnica je priamka, ktorá síce kružnicu nepretína, ale dotýka sa jej v jednom bode. Tento bod voláme bod dotyku. Pre každú dotyčnicu platí, že je kolmá na polomer dotýkanej kružnice v bode dotyku. Odtiaľ plynie, že pre jeden bod na kružnici existuje iba jedna dotyčnica.

Pozrime sa na našu rovinu, v ktorej leží Zem, Slnko, Venuša a Samko. Spravme dotyčnicu k povrchu Zeme, s bodom dotyku v mieste, kde stojí Samko. Tá nám rozdelí rovinu na dve časti. V polrovine, kde nie je Zem, Samko vidí všetky nebeské objekty, lebo mu nič nezacláňa. Avšak v polrovine, kde je Zem, nevidí nič, pretože lúče z tejto polroviny narazia na Zem skôr, než sa dostanú k Samkovi.



Obr. 7: Čo vidí Samko?

Pri riešení tejto úlohy vám odporúčame vziať si nejakú guľôčku (alebo ak máte radšej 2D, tak mincu), na ktorej si nakreslíte rovník a póly. Skúsme si pomocou malej Zeme zistiť, kde sa musí nachádzať Samko a Zem na našom obrázku. Ak si chytíme Zem tak, aby severný pól bol na vrchu, v smere hodinových ručičiek sa budeme pohybovať na západ a proti smeru na východ. Geograficky zdatní riešitelia vedia aj to, že Zem rotuje zo západu na východ, teda proti smeru hodinových ručičiek.

Keď sa Samko pozerá na západ Slnka, tak sa pozerá aj na geografický (pozemský) západ, pretože, ako býva zvykom, Slnko zapadá na západe. Predstavme si preto Samka, ktorý stojí na rovníku a pozerá sa na geografický západ (z nášho pohľadu sa pozerá v smere hodinových ručičiek). Aby pred sebou videl Slnko, musí sa pozerať v smere dotyčnice k Zemi, ktorá prechádza cez Slnko a musí stáť úplne vľavo (pozrite sa na obrázok).

Síce teraz už vieme, kde stojí Samko, no ešte stále sme neprišli na to, kde je jeho milovaná Venuša. Keďže Slnko práve zapadá, nachádza sa na obzore. V časti a) je Venuša 26° nad obzorom. Uhol Slnko – Zem – Venuša je teda 26°. Venuša teda musí ležať na polpriamke z bodu, kde stojí Samko (zo Zeme), ktorá zviera uhol 26° s polpriamkou (dotyčnicou) Zem – Slnko. Tento uhol môžme narysovať naľavo aj napravo od dotyčnice. Keďže Samko stojí naľavo, vidí len „ľavú“ časť vesmíru, kde sa nachádza len jedna z uvažovaných polpriamok. Venuša musí byť na priesečníku tejto polpriamky a svojej obežnej dráhy. Pozor, teraz však môžu nastať až tri situácie:

1. polpriamka nepretne obežnú dráhu (Samko teda nemôže vidieť Venušu pod takýmto uhlom),
2. polpriamka sa dotkne obežnej dráhy len v jednom bode (Venuša môže byť len na jednom mieste),
3. polpriamka pretne obežnú dráhu (Venuša môže byť na dvoch miestach).

Ako zistiť, ktorá situácia nastane? Najjednoduchšie je nakresliť si obrázok, no vieme to aj vypočítať. Kokrétne, poďme zistiť, koľko stupňov nad obzorom by Venuša musela byť, aby nastala 2. situácia.

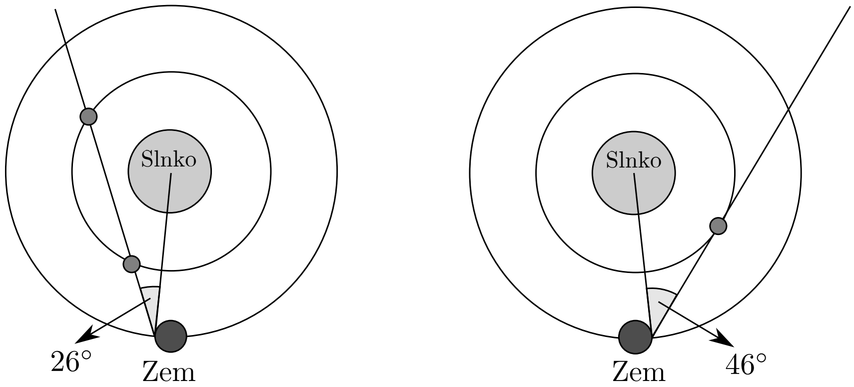
Priamka Zem – Venuša by v takom prípade bola dotyčnica k obežnej dráhe Venuše. Úsečka Slnko – Venuša je polomer obežnej dráhy Venuše, ktorý končí v bode dotyku – tieto dve čiary sú teda na seba kolmé. Kolmosť znamená, že Zem, Venuša a Slnko tvoria pravouhlý trojuholník s pravým uhlom pri Venuši. Preponou je úsečka medzi Slnkom a Zemou s dĺžkou d_z a protiľahlá odvesna k hľadanému uhlu je úsečka medzi Venušou a Slnkom s veľkosťou $0{,}72\,d_\mathrm{z}$. V tomto pravouhlom trojuholníku potom platí

$$\sin\alpha = \frac{\text{protiľahlá}}{\text{prepona}} = \frac{0{,}72\cdot d_\mathrm{z}}{d_\mathrm{z}} = 0{,}72\,,$$
$$\alpha \doteq 46^\circ\,.$$

Keďže $26^\circ < \alpha$, pri západe Slnka v prvom prípade nastala 3. situácia. Venuša sa teda môže nachádzať na 2 miestach, ktoré sú nakreslené na obrázku 8.

Keď sa Samko pozerá na Venušu pri východe Slnka, pozerá sa proti smeru hodinových ručičiek. Aby uvidel Slnko, musí byť, rovnako ako na našom obrázku, úplne vpravo a vidieť len „pravú“ polovicu vesmíru. Keďže v tomto prípade Samko vidí Venušu pod uhlom presne 46°, je len jedno miesto, kde sa Venuša môže nachádzať a je znázornené opäť na obrázku 8.

Keď je polnoc, Samko stojí priamo oproti Slnku. Vtedy Samko vidí „spodnú“ polovicu vesmíru, kde sa nenachádza ani Slnko, ani obežná dráha Venuše. Navyše sa pozerá na severovýchod, čiže sa nepozerá ani na rovinu, kde Venuša obieha. Pravdepodobne si svoju milovanú Venušu pomýlil s nejakou inou krásavicou.



Obr. 8: Riešenia v častiach a) a b)

2.5 Robotnícka (opravoval Baklažán)

Andrej pracuje na stavbe a chce ušetriť na materiáli. Oceľ používaná na stavbu konštrukcií je totiž drahšia než laná, ktoré majú pri naťahovaní podobné vlastnosti. Na stavbe často používajú takéto dve konštrukcie pripevnené k stene, na ktorých konci visia závažia (oveľa ťažšie, než oceľové tyče):

V obidvoch konštrukciách sú oceľové tyče spojené otáčavými kĺbmi. Takýmito kĺbmi sú tyče spojené aj so stenou. Ktoré z tyčí sú pri takejto záťaži naťahované, a teda ich môžeme nahradiť pevným lanom? Svoje tvrdenia nezabudnite patrične vysvetliť.

V tomto riešení budeme pracovať s rozkladaním a skladaním síl. Ak ste sa s tým doteraz nestretli, alebo tomu nerozumiete tak dobre, ako by ste chceli, odporúčam vám prečítať si UFOčebnicu z prvej série.[4]

Závažia sú podľa zadania oveľa ťažšie, než oceľové tyče. Tiažová sila pôsobiaca na konštrukciu teda bude oveľa menšia, než sila, ktorou konštrukciu ťahá nadol závažie. Preto gravitačnú silu pôsobiacu na tyče môžeme zanedbať bez toho, aby sme sa veľmi vzdialili od reality.

Pozrime sa teraz na jednu tyč v konštrukcii. Tyč sa nehýbe. Výslednica síl, ktoré na ňu pôsobia, musí byť teda nulová. Aké sily pôsobia na tyč? Tiažovú sme zanedbali, takže nám ostávajú už len sily, ktorými na ňu pôsobia kĺby na jej koncoch. Tieto dve sily sa musia vzájomne vyrušiť, teda musia mať rovnakú veľkosť a opačné smery. To ale nestačí. Predstavte si, že by sily pôsobili na tyč napríklad takto:

Obr. 9: Sily pôsobiace na tyč

Výslednica síl pôsobiacich na tyč by síce bola nulová, teda ťažisko tyče by sa nehýbalo, ale asi mi uveríte, že tyč by začala rotovať proti smeru hodinových ručičiek. Na to, aby sa tyč nezačala točiť, musia na ňu sily pôsobiť smerom od jej ťažiska, alebo ku jej ťažisku.

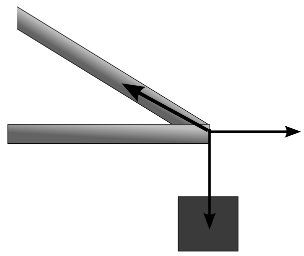
[4]Nájdete ju napríklad tu: `http://ufo.fks.sk/archiv/2014_15/8knizkaZima1.pdf`.

V tomto prípade teda musia sily, ktoré pôsobia na tyč na jej koncoch, pôsobiť rovnobežne s tyčou.[5] Reakcie na tieto sily, teda sily, ktorými tyč pôsobí na kĺby, majú presne opačný smer, teda sú tiež rovnobežné s tyčou.

Keď už vieme, ako to funguje teoreticky, poďme vyriešiť prvú konštrukciu. Pozrime sa najskôr, aké sily pôsobia na kĺb, na ktorom visí závažie. Lano so závažím ho ťahá nadol a obe tyče naňho pôsobia nejakými silami. Kĺb sa nehýbe, teda súčet týchto troch síl musí byť nulový. To sa dá inak povedať aj tak, že výsledná sila musí mať nulovú zvislú aj vodorovnú zložku.

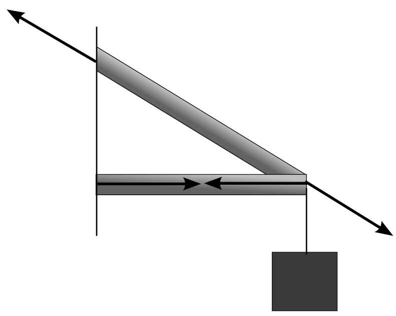
Pozrime sa najprv na zvislú zložku. Lano so závažím ťahá kĺb smerom nadol. Vodorovná tyč na kĺb pôsobí nejakou silou, ktorá, ako už vieme, musí byť tiež vodorovná, teda k zvislej zložke výslednice neprispieva. Zvislá zložka sily, ktorou pôsobí na kĺb šikmá tyč, teda musí mať smer nahor a rovnakú veľkosť ako sila, ktorou ťahá lano so závažím. To znamená, že šikmá tyč musí kĺb ťahať šikmo smerom doľava (doľava z nášho pohľadu, teda ku stene) nahor.

Pozrime sa teraz na vodorovnú zložku výslednice síl. Sila, ktorou pôsobí na kĺb lano so závažím je zvislá, teda má nulovú vodorovnú zložku. Sila, ktorou pôsobí šikmá tyč má smer doľava nahor (z nášho pohľadu), teda jej vodorovná zložka má smer doľava (k stene). Ostala nám už len sila od vodorovnej tyče, teda vodorovná zložka tejto sily musí mať smer doprava a rovnakú veľkosť, ako vodorovná zložka šikmej sily. Vodorovná tyč teda na kĺb musí pôsobiť silou so smerom doprava.



Obr. 10: Sily pôsobiace na kĺb

Podľa zákona akcie a reakcie kĺb pôsobí na tyče presne opačnými silami, ako tyče pôsobia na kĺb . Sily pôsobiace na tyče teda budú vyzerať takto:



Obr. 11: Sily pôsobiace na tyče

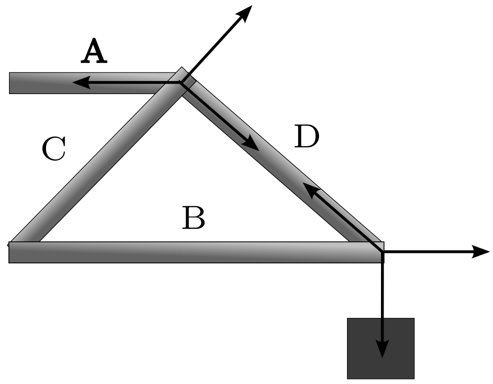
[5]Vo všeobecnosti platí, že ak sa teleso nemá točiť, musí byť súčet momentov síl naň pôsobiacich nulový. V tomto prípade sa to naozaj dá dosiahnuť jedine tak, že sily budú rovnobežné s tyčou. V iných prípadoch sa to ale môže dať aj inak.

Vodorovná tyč je teda stláčaná a zvislá je naťahovaná.

Teraz sa pozrime na druhú konštrukciu. Pre prehľadnosť si tyče označme písmenami A, B, C, D (pozri obrázok 12). Situácia pri kĺbe, na ktorom visí závažie, vyzerá úplne rovnako, ako v prvom prípade a aj sily tam budú pôsobiť rovnako. Na tyče B a D teda tiež musia pôsobiť sily rovnako, ako v prvom prípade.

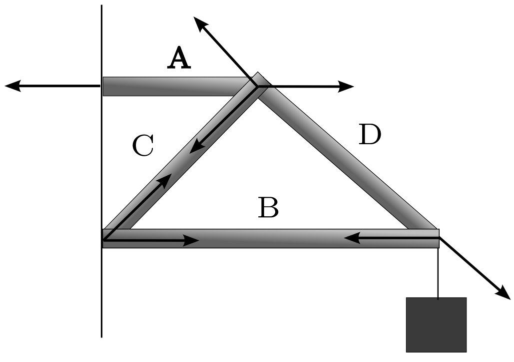
Pozrime sa teraz na sily pôsobiace na kĺb spájajúci tyče A, C a D. Najprv sa pozrime na zvislú zložku ich výslednice. Vieme, že tyč D je naťahovaná, teda bude ťahať kĺb smerom doprava nadol. Zvislá zložka tejto sily má teda smer nadol. Tyč A je vodorovná, teda sila ktorou pôsobí má nulovú zvislú zložku. To znamená, že zvislá zložka sily, ktorou poôsobí tyč C musí mať smer nahor (a rovnakú veľkosť ako zvislá zložka sily, ktorou ťahá D). Tyč C teda musí náš kĺb tlačiť smerom doprava nahor.

Teraz sa pozrime na vodorovnú zložku výslednice. Obe šikmé tyče pôsobia na kĺb silami, ktorých vodorovné zložky majú smer doprava. Zostávajúca tyč A teda musí kĺb ťahať doľava. Sily, ktoré pôsobia na kĺby teda vyzerajú takto:



Obr. 12: Sily pôsobiace na kĺby

a sily pôsobiace na tyče takto:



Obr. 13: Sily pôsobiace na tyče

Tyč A je teda naťahovaná, tyč B je stláčaná, tyč C je stláčaná a tyč D je naťahovaná.

2.6 Ako sa to láme? (opravovali Kamča a Katka, vzorák Samo a Katka)

Na pravouhlý hranol si Denda rada posvieti laserovým ukazovátkom. Jej obľúbený hranol má obdĺžnikový prierez a index lomu $n = 1{,}5$. Naposledy si naň zasvietila pod uhlom $\alpha = 35°$:

Podľa toho, kam svietila, lúč vyšiel z hranola buď cez stenu protiľahlú k tej, cez ktorú vchádzal, alebo cez stenu susednú s tou, cez ktorú vchádzal. Aký uhol β zviera lúč s protiľahlou stenou hranola, ktorú opúšťa? Aká je veľkosť uhla γ, keď lúč vychádza cez susednú stenu?

Na vyriešenie tejto úlohy vám určite padla vhod UFOčebnica[6], a to práve časť zaoberajúca sa Snellovým zákonom a zákonom lomu. Ak náhodou neviete, o čom hovoríme, odporúčame vám hodiť po nej očkom.

V UFOčebnici sme sa dozvedeli, že ak svetelný lúč prechádza cez rozhranie dvoch prostredí s rôznou optickou hustotou, teda s rôznym indexom lomu n, tak sa pri prechode láme. To jednoducho znamená, že mení svoj smer šírenia.

Náš lúč prechádza zo vzduchu do prostredia s indexom lomu $n_2 = 1{,}5$. Po chvíľke googlenia, alebo pohľade do fyzikálnych tabuliek zistíme, že podobný index lomu má napríkklad sklo. Okrem toho vieme, že index lomu vzduchu je $n_1 = 1$.

V príkladoch z optiky sú dôležité obrázky a geometria. Pozrime sa teda na prvý prípad. Lúč dopadá na rozhranie vzduch-sklo pod uhlom dopadu α. Podľa Snellovho zákona sa teda zlomí a ďalej pokračuje pod uhlom α':

$$n_1 \sin\alpha = n_2 \sin\alpha' \,.$$

Lúč následne putuje sklom, až kým nenarazí na ďalšie rozhranie sklo-vzduch. Tu je uhol α' uhlom dopadu a láme sa pod uhlom β', pričom z obrázka musí platiť $\beta + \beta' = 90°$. Opäť si napíšeme Snellov zákon:

$$n_2 \sin\alpha' = n_1 \sin\beta' \,.$$

Všimnime si, že posledné dve rovnice majú jednu stranu rovnakú. Môžeme ich spojiť do jednej:

$$n_1 \sin\alpha = n_1 \sin\beta' \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = \beta' \,.$$

Veľkosť uhla β je teda nakoniec

$$\beta = 90° - \alpha = 55° \,.$$

Teraz sa pozrime na druhý prípad a poďme vypočítať uhol γ. Začiatok cesty oboch lúčov je rovnaký: dopadajú pol uhlom α a oba sa lámu pod uhlom α'. Teraz ale tento uhol budeme musieť vyjadriť zo Snellovho zákona:

$$n_1 \sin\alpha = n_2 \sin\alpha' \qquad \Rightarrow \qquad \sin\alpha' = \frac{n_1}{n_2} \sin\alpha \,.$$

Aby sme mohli vyjadiť uhol α', potrebujeme sa vyslobodiť zo zovretia mocného sínusu. To sa nedá urobiť žiadnymi základnými matematickými úpravami. Sínus totiž nie je ochotný sa premennej vzdať, je však ochotný si ju prehodiť s jeho kamarátom arkusom sínusom[7]. To je funkcia, ktorá zo známeho sínusu uhla zistí, akú veľkosť má daný uhol. Platí totiž

$$\sin\theta = b \qquad \Rightarrow \qquad \theta = \arcsin b \,.$$

[6] `http://ufo.fks.sk/archiv/2014_15/8zadaniaZima2.pdf`

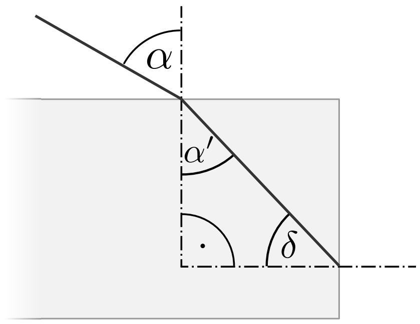
[7] Arkus sínus sa značí arcsin, ale na kalkulačke ho nájdete ako $\sin^{-1}$.

Arkus sínus použijeme na oslobodenie uhlu α':

$$\alpha' = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2}\sin\alpha\right) = 22{,}5^\circ\,.$$

Pozrime sa ďalej na sitáciu na druhom rozhraní (sklo-vzduch). Uhol dopadu na toto rozhranie označme δ a uhol, pod ktorým sa lúč zlomí, označme ε. Ak predĺžime kolmice z jedného aj druhého bodu, dostaneme pravouhlý trojuholník s uhlami α', δ a pravým uhlom ako na obrázku 14. Keďže súčet uhlov v trojuholníku je 180°, pre δ musí platiť

$$\delta = 180^\circ - 90^\circ - \alpha' = 90^\circ - \alpha' = 67{,}5^\circ\,.$$



Obr. 14: Výpočet uhla δ.

Teraz už vieme pomocou Snellovho zákona vypočítať uhol ε:

$$n_2\sin\delta = n_1\sin\varepsilon \qquad \Rightarrow \qquad \varepsilon = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\sin\delta\right) = \arcsin\left(\frac{1{,}5}{1}\sin 67{,}5^\circ\right) = \ldots$$

Ak tento výraz naťukáte do kalkulačky, vyhodí vám Math Error. To znamená presne to, čo sme sa dočítali v UFOčebnici. Pre niektoré uhly lom z opticky hustejšieho prostredia do redšieho nenastáva. Nastáva totiž takzvaný úplný odraz, kedy sa optické rozhranie tvári ako zrkadlo a všetko svetlo sa odrazí.

Vtedy platí zákon odrazu a lúč sa naspäť do hranola odrazí pod uhlom $\delta = 67{,}5^\circ$.