Fyzikálny korešpondenčný seminár
8. ročník, 2014/2015
UFO, KTFDF FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava
e-mail: otazky@fks.sk web: http://ufo.fks.sk

Vzorové riešenia 3. kola zimnej časti 2014/2015

3.1 Za rána...[1] (opravoval Baklažán, vzorák Maťo Ch.)

Istý lenivý fyzik sa jedného rána rozhodol pokosiť svoj kruhový trávnik pri dome. Aby sa však nenarobil, priviazal benzínovú kosačku o kolík v strede trávnika a naštartoval ju. Kosačka sa rozbehla a obiehala okolo kolíka tak, že lano sa na kolík namotávalo a kosačka sa pohybovala po špirále smerom ku kolíku.

Poraďte lenivému fyzikovi aký najväčší priemer môže mať kolík, aby kosačka pokosila celú plochu záhrady okrem miesta bezprostredne okolo kolíka. Kosačka na trávu kosí pás široký $30\,\mathrm{cm}$ a hrúbka lana je zanedbateľne malá.

Problém lenivého fyzika sa pokúsime vyriešiť tak, že sa pozrieme, ako sa zmení poloha kosačky pri jednej otočke okolo kolíka. Aby kosačka nevynechala žiaden kus trávnika, musí sa ku kolíku pri jednej otáčke priblížiť maximálne o šírku svojho záberu, v našom prípade teda o $30\,\mathrm{cm}$.

Kosačka sa priblíži ku kolíku presne o toľko, koľko lana sa namotá na kolík, teda o obvod kolíka. Z našej úvahy teda vyplýva, že ak bude obvod kolíka rovný $30\,\mathrm{cm}$, alebo menší, kosačka pokosí celý trávnik a ak bude obvod väčší, vynechá kosačka na trávniku nepokosenú špirálu.

Pre obvod kruhu o platí $o = 2\pi r = \pi d$ (kde r je polomer a d je priemer), z čoho dostávame vzťah pre najväčší možný priemer kolíka

$$d = \frac{o}{\pi} = \frac{30\,\mathrm{cm}}{\pi} \doteq 9{,}5\,\mathrm{cm}\,.$$

Kolík teda nemôže mať priemer väčší ako $9{,}5\,\mathrm{cm}$.

3.2 Družice (opravoval Jerguš, vzorák Peťo S.)

Maťo minule v televízii počul, že niektoré družice obiehajúce okolo Zeme sa neustále nachádzajú nad tým istým miestom Zemského povrchu. Teraz by ho zaujímalo, či sa môžu nachádzať nad ľubovoľnou časťou Zemského povrchu, alebo iba nad nejakou špeciálnou. Taktiež počul, že družice lietajú vo výške $36\,000\,\mathrm{km}$ nad povrchom Zeme. Vysvetlite, nad ktorou časťou povrchu Zeme môžu takéto družice lietať a vypočítajte ako rýchlo lietajú.

Najprv sa zamyslime, aký pohyb vlastne tá družica vykonáva. Je to pohyb konštantnou rýchlosťou po kružnici. Žiadne iné pohyby táto družica nevykonáva. Stredom kružnice, ktorú družica opisuje, je bod, ktorý leží na osi otáčania Zeme, pretože družica sa počas celého pohybu nachádza v rovnakej zemepisnej šírke a zároveň aj toho, že sa družica pohybuje konštantnou rýchlosťou.

[1] http://youtu.be/wAEFyGrbXro

Keď nejaké teleso (družica, kus kameňa, raketoplán) okolo niečoho obieha, umožňuje to sila, ktorej hovoríme dostredivá. Dostredivá sila pôsobí na teleso v smere *do stredu* otáčania. Keby na teleso dostredivá sila nepôsobila, hýbalo by sa rovnomerne priamočiaro (podľa druhého Newtonovho pohybového zákona), a teda namiesto obiehania by jednoducho uletelo preč. Rolu dostredivej sily môže hrať akákoľvek sila, napríklad pre auto jazdiace do kruhu je dostredivou silou trenie pneumatík o asfalt, v prípade družice je zas dostredivou silou gravitačná sila Zeme.

Situácia sa ale radikálne zmení, keď sa na sily pozrieme pohľadom človeka, ktorý sa nachádza na predmete, ktorý okolo niečoho obieha. Ideálny príklad je kolotoč. Keď sedíme na kolotoči, ktorý sa otáča, okrem dostredivej sily (ktorou je v tomto prípade výslednica normálových a trecích síl styku kolotoča s nami) aj silu *odstredivú*.

Táto sila ale nemá žiadne fyzikálne opodstatnenie. Je to takzvaná *imaginárna* alebo *fiktívna* sila narozdiel od ostatných *reálnych* síl. Jedinou reálnou silou, ktorá na nás pôsobí, je len už spomínaná dostredivá sila, ktorá spôsobuje, že okrem kolotoča sa otáčame aj my. Spolu s nami sa však otáča aj naša *vzťažná sústava*, v ktorej sa pôvodne nehybné predmety začnú od osi otáčania odpudzovať. Túto zdanlivú silu pôsobiacu na všetko, v rotujúcej sústave nazývame práve odstredivou silou. Naviac, odstredivá sila pôsobí v rovine, v ktorej vzťažná sústava obieha, keďže pôsobí presne od stredu.

Pri pohľade z vesmíru (nehybná vzťažná sústava) pôsobí na družice gravitačná sila Zeme v úlohe dostredivej sily. Ak sa na problém pozrieme z pohľadu družice (otáčajúca sa vzťažná sústava), pôsobí na ňu okrem gravitačnej sily aj sila odstredivá. Na to, aby družica ostala na obežnej dráhe (teda aby sa nepohybovala vzhľadom na otáčajúcu sa sústavu), je potrebné, aby sa gravitačná sila vyrovnala odstredivej. Vtedy bude výsledná sila pôsobiacia na družicu v otáčajúcej sa sústave nulová.

Toto je ale možné iba vtedy, ak gravitačná a odstredivá sila ležia na jednej priamke, inak by sa stalo, že po sčítaní by ich výslednica nebola nulová. Z toho ale už vyplýva, že takáto družica môže obiehať iba okolo rovníka, pretože len tam je gravitačná sila na rovnakej priamke ako odstredivá.

Dá sa dokonca vypočítať, že takéto družice naozaj obiehajú vo výške približne 36 000 km nad zemským povrchom. Tieto družice naviac voláme geostacionárne. Využívajú sa najmä na telekomunikáciu, ale aj na rôzne hydrometeorologické merania a astronomické pozorovanie vesmíru.

Rýchlosť geostacionárych družíc vypočítame pomocou vzorca $s = vt$, do ktorého dosadíme za dráhu obvod kružnice, po ktorej družica obieha a za čas dĺžku jedného takéhoto obehu, čo bude presne jeden deň. Okrem toho ešte prehodíme časové jednotky na sekundy a nezabudneme, že hoci satelity letia 36 000 km nad zemským povrchom, obiehajú po kružnici s polomerom väčším, a to práve o polomer Zeme. Takto pre rýchlosť dostávame

$$v = \frac{s}{t} = \frac{2\pi r}{t} \doteq \frac{2\pi \cdot (36\,000\,\mathrm{km} + 6\,400\,\mathrm{km})}{24 \cdot 60 \cdot 60\,\mathrm{s}} \doteq 3{,}1\,\mathrm{km/s}\,.$$

3.3 Ponorka (opravoval Paťo, vzorák Mišo Ď.)

Vezmite si nádobu v tvare valca, naplňte ju vodou a položte ju na váhu. Potom si zoberte fľašu a ponárajte ju do vody v nádobe tak, aby sa pri tom nedotkla dna, ani stien nádoby. Namerajte a nakreslite graf závislosti hmotnosti ukazovanej váhou od výšky hladiny vo vonkajšej nádobe.

Experiment zopakujte pre aspoň 4 rôzne hmotnosti fľaše (hmotnosť fľaše ľahko zmeníte tak, že ju čiastočne naplníte vodou). Grafy porovnajte a zistite, či hmotnosť ukazovaná váhou závisí od hmotnosti fľaše.

Bonus: Pokúste sa vysvetliť, prečo je to tak.

Teória Najskôr si úlohu teoreticky rozoberme, aby sme mali aspoň predstavu, čo sa bude diať. Predstavme si váhu a na nej nádobu s vodou, v ktorej pláva prázdna fľaša. Váha nám pochopiteľne bude ukazovať nejakú hmotnosť, rovnú hmotnosti vody a fľaše. Následne chytíme fľašku a začneme ju rukou vtláčať do vody. Hladina vody vo vonkajšej nádobe začne rásť, pretože fľaša vytláča vodu z jej pôvodného miesta. Voda sa teda nikde nestráca, ani z fľašky nikto neodkusuje. Oba objemy, fľaše aj vody, sa zachovávajú. Aj preto sa v nádobe deje to, čo sa deje.

Aby sme vysvetlili zmenu ukazovanej hmotnosti, spomeňme si na Archiméda, ktorý vo svojom zákone hovorí: „Teleso ponorené do kvapaliny je nadľahčované vztlakovou silou, ktorej veľkosť sa rovná tiaži kvapaliny s rovnakým objemom, ako je objem ponorenej časti telesa.“ To znamená, že proti ruke bude tlačiť nejaká sila, ktorej veľkosť je podľa Archimedovho zákona rovná tiaži vytlačenej kvapaliny.

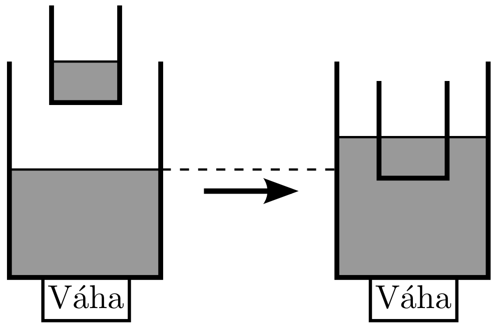
Zaujímavé je, že vztlaková sila bude rovnaká nezávisle na tom, či do kvapaliny ponárame fľašku so vzduchom alebo tehlu, ak do nej ponoríme rovnaký objem. Rozdiel medzi fľašou a tehlou je v tom, že v prípade fľaše bude vztlaková sila po ponorení dostatočného objemu postačujúca na to, aby sa vyrovnala s tiažou a fľaša tak plávala. V prípade tehly to tak nebude: na tehlu pôsobí väčšia tiažová sila ako je najväčšia možná hodnota vztlakovej sily.

Vráťme sa teraz k nášmu myšlienkovému experimentu: fľaša je ponorená v kvapaline. Proti ruke pôsobí vztlaková sila, ktorá je, ak sa fľaša nehýbe, v rovnováhe so silou, ktorou na fľašu tlačíme. Na váhe teda máme sústavu nádoby s vodou a fľaše, *na ktorú navyše zhora tlačíme rukou.* Je preto len prirodzené očakávať, že váha bude ukazovať viac, než sústava v skutočnosti váži. Navyše by malo platiť, že čím hlbšie je fľaša ponorená, tým väčšia vztlaková sila na ňu pôsobí, teda tým väčšou silou na ňu musíme zhora tlačiť, aby sa nehýbala, a teda tým viac bude ukazovať váha.

Definitívne rozptýlenie všetkých pochybností nastane vtedy, keď nás začne bolieť ruka a namiesto toho, aby sme na fľašu tlačili, do nej začneme liať vodu, ktorá bude svojou tiažou tlačiť na fľašu za nás. Keďže by malo byť jedno, či na fľašu tlačí naša ruka, alebo voda v jej vnútri, očakávali by sme, že váha bude ukazovať rovnakú hmotnosť, ako v predošlom prípade. Pozrime sa na to ale podrobnejšie.

Vztlaková sila bude v rovnováhe rovnaká ako tiaž vody, ktorú sme doliali. Zároveň je však podľa Archimedovho zákona rovnaká, ako tiaž vytlačenej vody. Vytlačená voda teda musí mať rovnakú hmotnosť (a objem), ako voda, ktorú sme doliali do fľaše! Preto mimochodom uvidíme, že hladiny vo fľaši a vo vonkajšej nádobe budú zarovno seba[2] a vyššie, ako bola pôvodná hladina. Takéto dolievanie vody je preto z hľadiska hmotnosti úplne to isté, ako keby tam žiadna fľaša nebola a vodu sme dolievali len do nádoby. Váha bude teda aj v tomto prípade ukazovať vyššiu hmotnosť.

[2] Musíme ale zanedbať, že aj fľaška niečo váži.

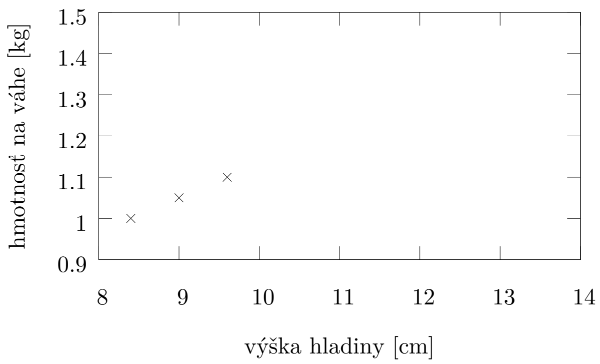


Obr. 1: Postup merania

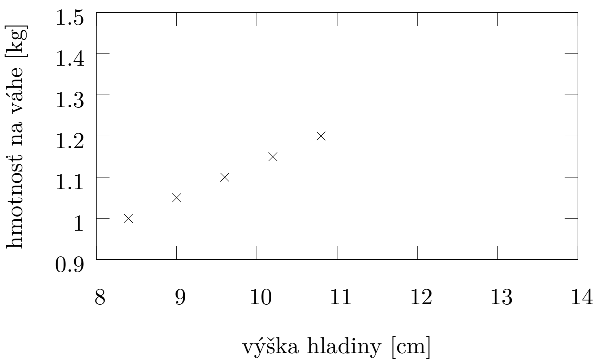
Experiment Zobrali sme si štyri rovnaké fľaše a po jednej sme ich stavali na váhu. Naplnili sme ich tak, aby váha ukazovala 100 g, 200 g, 300 g a 400 g.

Týmto sme si pripravili „závažia“. Potom sme vzali vedro (valcovú nádobu), dali ho na váhu a doliali vody tak, aby váha ukazovala 1 kg. Do vedra sme tiež dali pravítko na meranie výšky hladiny. Následne sme zostrojili dômyselné zariadenie (z dvoch stoličiek, metly a motúzu), na ktoré sme zavesili fľašku s vodou a spúšťali ju do vedra ako na kladke.

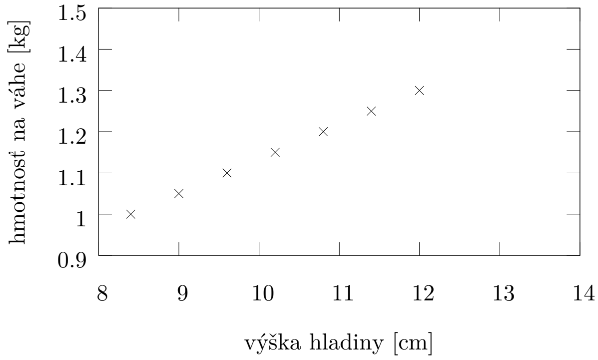
Ako prvú sme merali 100 g fľašku. Zaznamenali sme počiatočnú hmotnosť na váhe a výšku hladiny. Potom sme fľašku spúšťali, kým váha neukázala o 50 g väčšiu hmotnosť. V tomto bode sme zaznamenali výšku hladiny. Potom sme spustili fľašku tak, aby hmotnosť na váhe bola o 100 g väčšia. Opäť sme zaznamenali výšku hladiny. Skončili sme vtedy, keď fľaška už vo vedre plávala a teda nemalo zmysel ju spúšťať ďalej. Preto sme namiesto nej zavesili 200 g fľašku a merali rovnakým postupom, a rovnako aj ostatné fľašky. Všetky výsledky sme zakreslili do grafu.



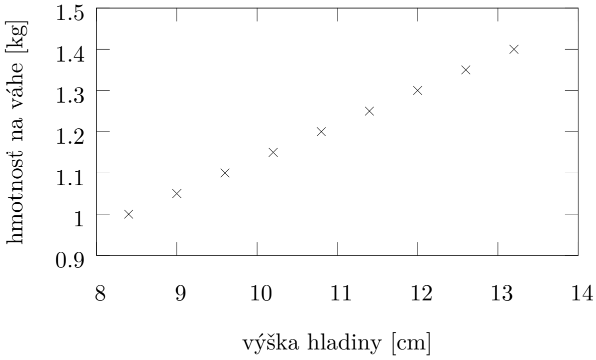
Obr. 2: Graf závislosti pre $m = 100\,\mathrm{g}$ fľašu



Obr. 3: Graf závislosti pre $m = 200\,\mathrm{g}$ fľašu



Obr. 4: Graf závislosti pre $m = 300\,\mathrm{g}$ fľašu



Obr. 5: Graf závislosti pre $m = 400\,\mathrm{g}$ fľašu

Už prvý pohľad nám hovorí, že s ťažšou fľaškou sme sa dokázali ponoriť hlbšie ako s ľahšou. Dôležité je, že namerané dáta opisujú pri všetkých štyroch fľašiach rovnakú závislosť. Po teoretickom úvode je to dokonca očakávateľné. Môžeme teda konštatovať, že hmotnosť ukázaná na váhe nezávisí od celkovej hmotnosti fľaše, ale len od objemu jej ponorenej časti, v zhode s teoretickým úvodom.

3.4 Pestrofarebné divadlo (opravovali Maťo Ch. a Marek, vzorák Marek)

Bum! Fijúúú! Bác! Plesk! Ohňostroj bol pre Čajku vždy postrachom. Dodnes sa k nemu neodváži ani priblížiť. No napriek tomu si rada vybavuje moment, keď videla tú spleť nádherných farieb po prvý raz. Matne si spomína, že výbuch ohňostroja videla pod uhlom 30° nad zemou a začula ho až 5 sekúnd po tom, čo ho zazrela. Nepamätá si však, z akej vzdialenosti od nej bol vystrelený, ani v akej výške nad zemou vybuchol. Zistite to namiesto nej. Uvažujte, že rýchlosť svetla má hodnotu $300\,000\,\mathrm{km/s}$ a rýchlosť zvuku je $340\,\mathrm{m/s}$.

V prvom rade si vypočítame vzdialenosť Čajka – výbuch, ktorú označíme ako l. Označme si čas, za ktorý svetlo preletí vzdialenosť l, ako t_c. V zadaní sme sa dočítali, že zvuku trvalo prejdenie tej istej vzdialenoti o 5 sekúnd dlhšie ako svetlu (teda ju prešiel za čas $t_\mathrm{c} + 5\,\mathrm{s}$). Ďalej $c = 300\,000\,\mathrm{km/s} = 300\,000\,000\,\mathrm{m/s}$ je rýchlosť svetla a $v_\mathrm{z} = 340\,\mathrm{m/s}$ rýchlosť zvuku.

V škole sme sa naučili, že pre rovnomerný pohyb platí jednoduchý vzorec pre rýchlosť $v = s/t$. Rýchlosť svetla c musí podľa tohto vzorca spĺňať

$$c = \frac{l}{t_\mathrm{c}}\,.$$

Rýchlosť zvuku zasa musí spĺňať

$$v_\mathrm{z} = \frac{l}{t_\mathrm{c} + 5\,\mathrm{s}}\,.$$

Napísali sme teda dve rovnice o dvoch neznámych (nepoznáme čas t_c, ani vzdialenosť l). Našťastie, tieto rovnice vieme vyriešiť. Keďže nepotrebujeme vedieť čas, vyjadríme si ho z prvej rovnice:

$$t_\mathrm{c} = \frac{l}{c}\,.$$

To si dosadíme do druhej rovnice, čím sa času v rovnici zbavíme:

$$v_{\mathrm{z}} = \frac{l}{l/c + 5\,\mathrm{s}}\,.$$

Úpravami dostaneme

$$5\,\mathrm{s}\cdot v_{\mathrm{z}} = l - \frac{l\,v_{\mathrm{z}}}{c}\,.$$

Hľadanú vzdialenosť l vyberieme pred zátvorku, ktorú premiestnime na druhú stranu rovnice. Dostaneme teda

$$l = \frac{5\,\mathrm{s}\cdot v_{\mathrm{z}}}{1 - v_{\mathrm{z}}/c} = \frac{5\,\mathrm{s}\cdot c v_{\mathrm{z}}}{c - v_{\mathrm{z}}}\,.$$

Po dosadení dostávame $l \doteq 1\,700\,\mathrm{m}$.

Aby sme zistili výšku h a vodorovnú vzdialenosť d, musíme nájsť v probléme pravouhlý trojuholník – je to ten so stranami l, h a d. Z UFOčebnice prvej série vyčítame, že medzi týmito stranami platia vzťahy so sínusom a kosínusom. Keďže uhol 30° je uhol priľahlý k d a protiľahlý k h, platí

$$\cos(30°) = \frac{d}{l}\,, \qquad \sin(30°) = \frac{h}{l}\,.$$

Potom

$$d = l\cos(30°) \doteq 1\,700\,\mathrm{m}\cdot 0{,}87 \doteq 1\,472\,\mathrm{m}\,,$$
$$h = l\sin(30°) \doteq 1\,700\,\mathrm{m}\cdot 0{,}5 \doteq 850\,\mathrm{m}\,.$$

3.5 UFO-čajovňa (opravovali Monika a Samko, vzorák Vladko)

Predstavte si, že by k vám na návštevu prišli traja UFO vedúci. Chceli by ste ich niečím ponúknuť. Kofolou? Nie, to nie je ono. Chce to niečo poriadne. Čaj? To už znie lepšie. Čaj ale treba uvariť. To si však spomeniete, že doma máte akurát 3 veľké kanvice, pričom v každej z nich uvaríte vodu maximálne tak na jeden čaj. Nevadí, dá sa to variť súčasne. Na to ale treba elektrinu. . .

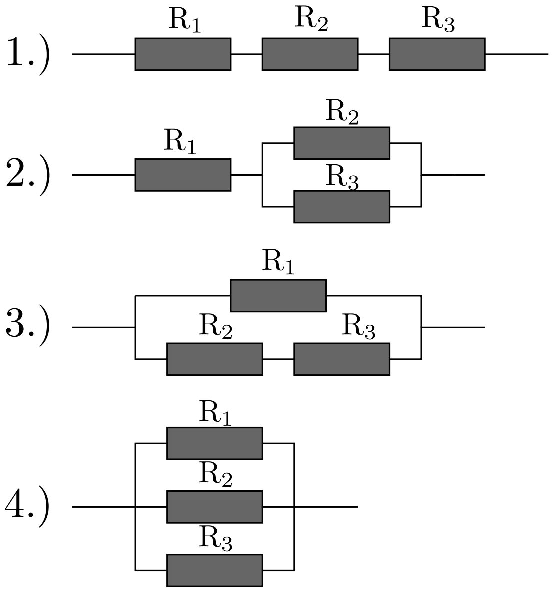
K dispozícii doma máte len jeden zdroj konštantného napätia a veľa povaľujúcich sa vodičov. Vy im ten čaj chcete doniesť čo najskôr, tak hľadáte najefektívnejší spôsob, akým pozapájať 3 kanvice, zdroj a vodiče tak, aby ste mali dostatok ohriatej vody. Ako by ste to urobili? UFO čaká. . .

Na to aby sme zohriali vodu v kanviciach, musí byť vykonaná práca W. Asi nie je potrebné zvlášť vysvetľovať, že táto práca nezávisí od nášho zapojenia, pretože W je rozdiel medzi vnútornou energiou studenej a teplej vody. Tento rozdiel je konštantný bez ohľadu na to, akým spôsobom vodu zohrejeme. My chceme prácu vykonať čo najrýchlejšie, teda potrebujeme, aby zapojené kanvice mali čo najväčší výkon $P = \frac{W}{t} = \frac{U^2}{R}$. To znamená, že musíme minimalizovať odpor a maximalizovať napätie.

Napätie nemôžeme meniť, lebo podľa zadania máme zdroj konštantného napätia. Odpor jednej kanvice je určený parametrami jej špirály, teda ho tiež nevieme ovplyvniť, no vieme rôznym zapojením kanvíc dostať rôzny odpor celej schémy.

Kanvice sa v obvode správajú ako rezistory s odporom R. Tri rezistory môžme zapojiť štyrmi nasledovnými spôsobmi:[3]

[3] Odpory rezistorov sú rovnaké, lebo máme rovnaké kanvice. Indexami sme ich rozlíšili len preto, aby sme sa lepšie orientovali vo výpočtoch



Obr. 6: Schémy možných zapojení

Teraz už len vypočítame celkový odpor jednotlivých schém a vyberieme tú s najmenším odporom.

Prvá schéma je sériové zapojenie a pre jej odpor platí $R_{c1} = R + R + R = 3R$.

Druhá schéma je trocha zložitejšia. Odpory R_2 a R_3 sú zapojené paralelne, takže ich vieme nahradiť rezistorom s odporom R_{23}, ktorý vypočítame nasledovne

$$\frac{1}{R_{23}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R}\,,$$

$$R_{23} = \frac{1}{2}R\,.$$

Teda celkový odpor druhej schémy je $R_{c2} = R + R_{23} = R + \frac{R^2}{2R} = \frac{3}{2}R$.

Tretia schéma je podobne zrátateľná ako druhá, lebo je to tiež iba sériové a paralelné zapojenie

$$\frac{1}{R_{c3}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R+R}\,,$$

$$\frac{1}{R_{c3}} = \frac{3}{2R}\,,$$

$$R_{c3} = \frac{2}{3}R\,.$$

Štvrtá, teda posledná schéma má odpor

$$\frac{1}{R_{c4}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R}\,,$$

$$R_{c4} = \frac{1}{3}R\,.$$

Ako vidíme, tak najmenší odpor má paralelné zapojenie. Výkon v tomto prípade je $P = 3\frac{U^2}{R}$ čo je najväčší možný výkon aký vieme pri zapojení troch rezistorov dostať.

Takže ak chceme, čo najrýchlejšie zohriať čaj pre návštevu, tak musíme kanvice zapojiť paralelne.

3.6 Energetická (opravovala Jarka)

a) Žaba chcel Moniku po úspešne s ňou pretancovanej strede ohúriť fyzikou. Na gumičku s tuhosťou $k = 2\,\mathrm{J/m^2}$ a s nulovou pokojovou dĺžkou zavesil závažie o hmotnosti $m = 600\,\mathrm{g}$. Závažie následne začalo kmitať tak, že gumička mala striedavo dĺžku od 0 po l. Monika, teraz očarená nie len Žabovým spevom, tancom, ale aj jeho inteligenciou sa ho spýtala, koľko centimetrov merala gumička v momente, keď bola najviac natiahnutá. Žaba sa zamyslel, no s jeho dušou informatika nedokázal Monike odpovedať. Pomôžte mu.

b) Ukážte, že kyvadlo vychýlené o $45°$ od rovnovážnej polohy sa už v rovnovážnej polohe nenachádza (to znamená, že sa začne pohybovať).

Každú podúlohu vyriešte pomocou metód zo študijného textu – UFOčebnice, nie pomocou síl.

Časť a) Pozrime sa, aké energie tu máme. Vidíme, že pri kmitaní sa mení výška závažia, teda sa bude meniť gravitačná potenciálna energia. Natiahnutá gumička bude mať ešte potenciálnu energiu pružnosti. Okrem toho má závažie aj kinetickú energiu.

Pri energiách často nemusíme počítať celkový priebeh, ale len situácie, ktoré nás naozaj zaujímajú. V tomto prípade to budú okamihy, kedy je závažie najnižšie alebo najvyššie. Tieto dva body sú špecifické tým, že závažie v nich mení svoj smer pohybu, a teda v nich má nulovú rýchlosť. To znamená, že má aj nulovú kinetickú energiu, a tak nám v týchto dvoch bodoch stačí v zákone zachovania energie počítať iba s potenciálnymi energiami.

Keď je závažie v najnižšom bode, dĺžka gumičky je l. Túto hladinu si tiež určíme za hladinu nulovej gravitačnej potenciálnej energie. Súčet potenciálnych energií v tomto bode bude teda rovný len energii skrytej v gumičke

$$E_{\mathrm{p1}} = \frac{1}{2}kl^2\,.$$

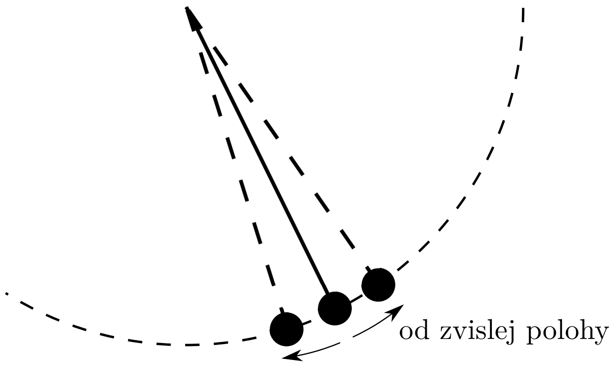
Keď je závažie v najvyššom bode, dĺžka gumičky je nulová (a jej energia teda tiež). Poloha závažia sa ale zdvihla o l, čiže narástla gravitačná potenciálna energia. Súčet potenciálnych energií v tomto bode bude

$$E_{\mathrm{p2}} = mgl\,.$$

Systém gumička a závažie je uzavretá sústava, a preto musí platiť zákon zachovania energie

$$\begin{aligned}\underbrace{E_{\mathrm{k1}}}_{0} + E_{\mathrm{p1}} &= \underbrace{E_{\mathrm{k2}}}_{0} + E_{\mathrm{p2}}\,,\\ \frac{1}{2}kl^2 &= mgl\,,\\ l &= \frac{2mg}{k} \doteq 5{,}9\,\mathrm{m}\,.\end{aligned}$$

Časť b) Predpokladajme, že táto poloha je rovnovážna a stabilná. Potom sa po malom vychýlení[4] kyvadla do ľubovoľného smeru jeho potenciálna energia zvýši. Naše kyvadlo vieme vychýliť do dvoch smerov: môžeme ho ešte viac vychýliť od zvislej polohy, alebo ho môžeme vychýliť smerom ku zvislej polohe. Oba spôsoby vychýlenia sú na obrázku 7. Keď teda chceme zistiť, či sa kyvadlo práve nachádza v rovnovážnej stabilnej polohe, musíme sa pozrieť na to, ako sa zmení jeho potenciálna energia, keď ho vychýlime každým z týchto smerov. Ak sa *v každom* z nich zvýši, kyvadlo je v rovnovážnej stabilnej polohe.



Obr. 7: Možné vychýlenia kyvadla

Vychýľme teda kyvadlo tým istým smerom, ktorým bolo vychýlené na začiatku (to je prvý prípad). Vidíme, že sa jeho výška nad zemou zvýšila.[5] Nárast jeho výšky v gravitačnom poli Zeme znamená aj nárast jeho potenciálnej energie, čo nie je v spore s tvrdením, že kyvadlo je v rovnovážnej stabilnej polohe, no k potvrdeniu musíme ešte zistiť aj zmenu potenciálnej energie pri opačnom vychýlení.

V druhom prípade, teda keď kyvadlo vychýlime smerom k jeho najnižšej možnej polohe sa však jeho výška zníži. To znamená, že sa zníži aj jeho potenciálna energia, takže existuje posunutie v ktorom sa potenciálna energia kyvadla zníži. Toto je v spore s počiatočným tvrdením, a teda kyvadlo sa v danom prípade v rovnovážnej stabilnej polohe nenachádza.

Existujú aj iné typy rovnovážnych polôh: labilná a indiferentná. V labilnej potenciálna energia telesa každým smerom klesá a v indiferentnej sa každým smerom nemení. Avšak energia v prvom z možných posunutí rastie, čo nám vylučuje aj tieto typy rovnovážnych polôh, takže teleso nebude v žiadnej rovnovážnej polohe.

V zadaní sme omylom spravili chybu, pôvodne sme od vás chceli, aby ste dokázali len to, že sa kyvadlo nenachádza v rovnovážnej stabilnej polohe, za čo sa dodatočne ospravedlňujeme. Na získanie plného počtu bodov tak stačilo dokázať len to, že sa kyvadlo nenachádza v rovnovážnej stabilnej polohe.

[4]To, ktoré vychýlenia sú „malé“, a ktoré už nie, je diskutabilná otázka, na ktorú dáva odpoveď časť matematiky nazývaná *diferenciálny počet*. V našom prípade stačí predpokladať, že spomínané malé vychýlenie bude omnoho menšie ako vychýlenie o $1°$.

[5]Vlaste sme takto kyvadlo vychýlili od zvislého smeru ešte viac, ako bolo pôvodne.