Fyzikálny korešpondenčný seminár
8. ročník, 2014/2015
UFO, KTFDF FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava
e-mail: otazky@fks.sk web: http://ufo.fks.sk

Zadania 3. kola zimnej časti 2014/2015

Termín: 24. 11. 2014

3.1 Za rána...[1] (9 bodov)

Istý lenivý fyzik sa jedného rána rozhodol pokosiť svoj kruhový trávnik pri dome. Aby sa však nenarobil, priviazal benzínovú kosačku o kolík v strede trávnika a naštartoval ju. Kosačka sa rozbehla a obiehala okolo kolíka tak, že lano sa na kolík namotávalo a kosačka sa pohybovala po špirále smerom ku kolíku.[2]

Poraďte lenivému fyzikovi aký najväčší priemer môže mať kolík, aby kosačka pokosila celú plochu záhrady okrem miesta bezprostredne okolo kolíka. Kosačka na trávu kosí pás široký 30 cm a hrúbka lana je zanedbateľne malá.

3.2 Družice (9 bodov)

Maťo minule v televízii počul, že niektoré družice obiehajúce okolo Zeme sa neustále nachádzajú nad tým istým miestom Zemského povrchu. Teraz by ho zaujímalo, či sa môžu nachádzať nad ľubovoľnou časťou Zemského povrchu, alebo iba nad nejakou špeciálnou. Taktiež počul, že družice lietajú vo výške 36 000 km nad povrchom Zeme. Vysvetlite, nad ktorou časťou povrchu Zeme môžu takéto družice lietať a vypočítajte ako rýchlo lietajú.

3.3 Ponorka (9 bodov + 3 bonusové)

Vezmite si nádobu v tvare valca, naplňte ju vodou a položte ju na váhu. Potom si zoberte fľašu a ponárajte ju do vody v nádobe tak, aby sa pri tom nedotkla dna, ani stien nádoby. Namerajte a nakreslite graf závislosti hmotnosti ukazovanej váhou od výšky hladiny vo vonkajšej nádobe.

Experiment zopakujte pre aspoň 4 rôzne hmotnosti fľaše (hmotnosť fľaše ľahko zmeníte tak, že ju čiastočne naplníte vodou). Grafy porovnajte a zistite, či hmotnosť ukazovaná váhou závisí od hmotnosti fľaše.

Bonus: Pokúste sa vysvetliť, prečo je to tak.

3.4 Pestrofarebné divadlo (9 bodov)

Bum! Fijúúú! Bác! Plesk! Ohňostroj bol pre Čajku vždy postrachom. Dodnes sa k nemu neodváži ani priblížiť. No napriek tomu si rada vybavuje moment, keď videla tú spleť nádherných farieb po prvý raz. Matne si spomína, že výbuch ohňostroja videla pod uhlom 30° nad zemou a započula ho až 5 sekúnd po tom, čo ho zazrela. Nepamätá si však, z akej vzdialenosti od nej bol vystrelený, a v akej výške nad zemou vybuchol. Zistite to namiesto nej. Uvažujte, že rýchlosť svetla má hodnotu 300 000 km/s a rýchlosť zvuku je 340 m/s.

[1] http://youtu.be/wAEFyGrbXro
[2] Názorná videoukážka: http://youtu.be/lR7lb5N9YrA

Seminár podporujú:

3.5 UFO-čajovňa (9 bodov)

Predstavte si, že by k vám na návštevu prišli traja UFO vedúci. Chceli by ste ich niečím ponúknuť. Kofolou? Nie, to nie je ono. Chce to niečo poriadne. Čaj? To už znie lepšie. Čaj ale treba uvariť. To si však spomeniete, že doma máte akurát 3 veľké kanvice, pričom v každej z nich uvaríte vodu maximálne tak na jeden čaj. Nevadí, dá sa to variť súčasne. Na to ale treba elektrinu...

K dispozícii doma máte len jeden zdroj konštantného napätia a veľa povaľujúcich sa vodičov. Vy im ten čaj chcete doniesť čo najskôr, tak hľadáte najefektívnejší spôsob, akým pozapájať 3 kanvice, zdroj a vodiče tak, aby ste mali dostatok ohriatej vody.[3] Ako by ste to urobili? UFO čaká...

3.6 Energetická (9 bodov)

a) Žaba chcel Moniku po úspešne s ňou pretancovanej strede ohúriť fyzikou. Na gumičku s tuhosťou $k = 2\,\mathrm{J/m^2}$ a s nulovou pokojovou dĺžkou zavesil závažie o hmotnosti $m = 600\,\mathrm{g}$. Závažie následne začalo kmitať tak, že gumička mala striedavo dĺžku od 0 po l. Monika, teraz očarená nie len Žabovým spevom, tancom, ale aj jeho inteligenciou sa ho spýtala, koľko centimetrov merala gumička v momente, keď bola najviac natiahnutá.[4] Žaba sa zamyslel, no s jeho dušou informatika nedokázal Monike odpovedať. Pomôžte mu.

b) Ukážte, že kyvadlo vychýlené o 45° od rovnovážnej polohy sa už v rovnovážnej polohe nenachádza (to znamená, že sa začne pohybovať).

Každú podúlohu vyriešte pomocou metód zo študijného textu – UFOčebnice, nie pomocou síl.

UFOčebnica: Energie

Milí riešitelia!

Po textoch o silách a šírení svetelných lúčov v minulých UFOčebniciach sa pozrieme na ďalšiu zaujímavú oblasť fyziky – energie. Konkrétne sa zameriame na rôzne formy mechanickej energie. Vedeli ste, že pomocou energií vieme riešiť rôzne, často komplikované problémy, rýchlo a naozaj jednoducho? Ak nie, čítajte ďalej. Ak áno, čítajte tiež, určite sa niečo nové dozviete!

Zachovávajúce sa veličiny

V prírode sa občas stretávame s veličinami, ktoré sa počas nejakého deja zachovávajú, teda sa nemenia v čase. Čo to presne znamená? Dá sa to ukázať na jednoduchom príklade zo života.

[3] To znamená, že hľadáte také zapojenie, aby bol súčet výkonov kanvíc v obvode čo najväčší.
[4] Chceme teda zistiť číselnú hodnotu l.

Predstavte si malé dieťa, Jožka, ktoré sa hrá so stavebnicou z kociek. Všetky kocky sú rovnaké a je ich dokopy 32. Jožko sa s kockami hrá kazdý deň. Keď sa s nimi dohrá, jeho mama musí kocky uložiť naspäť do krabice. A celkom očakávane zisťuje, že do krabice musí uložiť vždy rovnaký počet kociek rozváľaných po koberci – a to práve 32.

Po čase sa však stane zmena, pretože mama nájde po svojom synovi len 31 kociek! Krátkym hľadaním však nájde aj poslednú, 32. kocku, ktorá sa ukryla pod kobercom.

Iný deň naopak mama nájde až 37 kociek. Po chvíli rozmýšľania si však uvedomí, že Jožko bol na nášteve u svojho kamaráta, kde sa hrali so svojimi stavebnicami a Jožko si zrejme omylom zobral kocky svojho kamaráta domov. A naozaj, kamarátovi chýbalo práve 5 kociek – rovnaký počet kociek, ako mal Jožko naviac. Po vrátení týchto kociek má Jožko znova rovnaký počet 32 kociek.

Pozor, tu už prichádza pointa: všimnime si, že veličina „počet Jožkových kociek“ sa v čase nemení – teda *sa zachováva*. Ako vy mohol vyzerať taký zákon popisujúci toto zachovanie? Napríklad nejako takto

$$\text{(počet kociek na koberci)} = 32\,. \tag{1}$$

Avšak neskôr zisťuje, že nestačí započítavať len kocky na koberci, ale aj kocky pod kobercom. Ako sa zmení náš vzorec?

$$\text{(počet kociek na koberci)} + \text{(počet kociek pod kobercom)} = 32\,. \tag{2}$$

Neskôr sa však veci môžu strácať aj inde a dokonca sa môže ich počet aj zväčšovať, čo vedie len k pribúdaniu ďalších členov vo vzorci. Takto sa vieme dostať k „všeobecnému vzorcu“, ktorý bude obsdahovať veľa členov popisujúcich všetky možné miesta výskytu kociek na každom mieste, kde Jožko bol. Toto vieme zapísať aj pohodlnejšie

$$\text{(počet Jožkových kociek vo vesmíre)} = \text{konšt.}\,, \tag{3}$$

kde slovo konšt. značí, že číslo na ľavej strane rovnice sa nemení, je konštantné. Jednoducho, nech je Jožkových kociek vo vesmíre hocikoľko, ak sa nebudú žiadne vytvárať, bude ich stále rovnako.

Teraz sa vráťme k fyzike. Zákony, vyjadrení rovnicami, ktorí popisujú, že sa nejaká veličina rovná stále tej istej hodnote, voláme zákony zachovania danej veličiny. V tomto prípade sme našli zákon zachovania počtu Jožkových kociek vo Vesmíre.

Zákony zachovania vieme nájsť aj vo fyzike. A je ich skutočne veľa. No jeden z nich má medzi nimi významné miesto, pretože platí veľmi často. Je ním práve *zákon zachovania energie.*[5]

S energiou to ale nie je také jednoduché, pretože energia má naozaj veľa rôznych foriem, pričom energia vystupujúca v zákone zachovania je súčtom naozaj všetkých energií. Z tohto dôvodu pred tým, ako sa naučíme napísať zákon zachovania energie pre konkrétny fyzikálny dej, sa najskôr potrebujeme oboznámiť zo základnými formami (druhmi) mechanickej energie. Tie sa často zachovávajú samé o sebe.

[5] Vo všeobecnosti si musíme dávať pozor na to, v akom priestore tento zákon vyslovujeme. Musí platiť, že je to *izolovaný systém*, tzn. žiadna energia do nášho problému nevchádza ani nevystupuje. Preto ak vieme, že náš problém je izolovaný (mama vie, že Jožko nemá požičané žiadne kocky), nemusíme sa zaoberať energiou celého Vesmíru.

Formy mechanickej energie

Určite ste sa už stretli s tým, že veľkým a rýchlo pohybujúcim sa veciam hovoríme, že majú veľkú energiu. Túto energiu získajú tak, že na ich rozbehnutie museli vykonať nejaké sily prácu. Táto práca (tiež forma energie) sa však nemohla len tak stratiť, ale zmenila sa na inú formu energia, ktorú voláme *kinetická energia* (niekedy tiež pohybová energia). Čím väčšiu má teleso hmotnosť alebo rýchlosť, tým má aj väčšiu kinetickú energiu. Označujeme ju E_k a jej veľkosť pre teleso s hmotnosťou m, pohybujúce sa rýchlosťou v vypočítame ako

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv^2\,,$$

Teraz si predstavte experiment. Pustíme loptičku z výšky 1 m nad Zemou. Čo sa stane? Loptička začne zrýchľovať, takže sa bude zvyšovať aj jej kinetická energia. Odkiaľ sa ale táto energia zoberie? Zo zákona zachovania vyplýva, že nejaká iná energia musí počas pádu loptičky klesať. Keďže pád loptičky spôsobuje gravitačná sila, je jednoduché predpokladať, že klesať bude energia, ktorú má loptička v nejakej výške v gravitačnom poli. Takúto energiu voláme *potenciálna energia* (alebo polohová energia, nie však potencionálna). Závisí len na polohe telesa v nejakom silovom poli (napríklad poznáme aj potenciálnu energiu v elektrickom alebo magnetickom poli) a nie na jeho rýchlosti. Kinetická energia naopak závisí vždy len od rýchlosti a od hmotnosti.

Niektoré sú zhrnuté v tabuľke 1.

Kinetická energia	translačná	$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv^2$
Potenciálna energia	homogénneho gravitačného poľa (na Zemi)	$E_\mathrm{p} = mgh$
	gravitačného poľa vo veľkej vzdialenosti r od Zeme	$E_\mathrm{p} = G\frac{mM}{r}$
	„potenciálna“ energia pružinky	$E_{\mathrm{p}_\mathrm{pružinka}} = \frac{1}{2}kx^2$

Tab. 1: Niektoré formy energie (význam veličín: m je hmotnosť telesa, h je výška telesa, G je Newtonova gravitačná konštanta, M je hmotnosť Zeme, k je tuhosť pružiny, x je jej natiahnutie)

Väčšinou označujeme súčet všetkých potenciálnych energií ako E_p a voláme ho jednoducho len potenciálna energia, aby sme nemuseli vždy vypisovať všetky možné potenciálne energie.

Ak sa teleso pohybuje vplyvom gravitácie, často sa energia zachováva, takže platí

$$E_\mathrm{k} + E_\mathrm{p} = \text{konšt.}\,,$$

pričom E_p označuje všetky prípadné potenciálne energie (napríklad energiu v tiažovom poli Zeme a energiu pružinky). Na tento vzťah sa môžeme pozerať aj tak, že energia sa „prelieva“ z potenciálnej na kinetickú (teleso zrýchľuje) alebo naopak (teleso spomaľuje a svoju energiu odovzdáva pružinke alebo gravitačnímu poľu).

To, ako sa tento vzorec používa v praxi si ukážeme na krátkom príklade: Sánkar sa púšťa z kopca vysokého $h = 5\,\mathrm{m}$. Akú bude mať rýchlosť v pri úpätí? Trenie medzi sánkami a snehom zanedbajte.

Na začiatok zistíme, ktoré energie sa počas pohybu sánkara menia. Sánkar sa na začiatku nehýbe, takže je jeho kinetická energia najprv nulová. Na konci sa určite bude pohybovať rýchlosťou (ozn. v), takže kinetická energia sa bude počas pohybu zväčšovať.

To ale nie je všetko. Ak sa pozrieme do tabuľky 1, vidíme, že pro pohybe sánkara dole kopcom sa bude znižovať gravitačná potenciálna energia, lebo v čase sa znižuje výška sánkara meraná od úpätia kopca. Žiadna iná potenciálna energia sa tu nevyskytuje, respektívne sa mení úplne zanedbateľne.

Zo zákona zachovania energie už vieme, že súčet kinetickej a gravitačnej potenciálnej energie sánkara je v každom čase rovnaký a konštantný. To znamená, že na začiatku pohybu (sánkar stojí na vrchole kopca, v rovnici ozn. indexom 1) bude tento súčet rovnaký, ako na konci pohybu (sánkar je na úpätí kopca a pohybuje sa rýchlosťou v, ozn. indexom 2):

$$E_{\mathrm{k1}} + E_{\mathrm{p1}} = E_{\mathrm{k2}} + E_{\mathrm{p2}}\,.$$

Teraz si treba uvedomiť, akú hodnotu majú všetky členy v rovnici a ktoré z nich sú nulové. V prvom rade sa sánkar na začiatku nehýbe, takže jeho kinetická energia je na začiatku nulová. To znamená, že $E_{\mathrm{k1}} = 0$. Na konci ide rýchlosťou v, ktorú chceme vypočítať, takže za E_{k2} dosadíme definíciu kinetickej energie.

Potenciálnu energiu v homogénnom gravitačnom poli vypočítame ako súčin hmotnosti sánkara m, tiažového zrýchlenia g a jeho výšky h. Výšku však musíme udávať vzhľadom na nejakú nulovú hladinu (môže to byť aj hladina mora), no my si povieme, že nulová výška bude na úpätí kopca.[6] To znamená, že na začiatku má sánkar výšku 5 m a na konci má výšku 0 m. Takto bude jeho potenciálna energia na konci E_{p2} nulová.

Po rozpísaní členov nám teda ostane jednoduchá rovnica, ktorú vyriešime pre rýchlosť v.

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2\,,$$

$$v = \sqrt{2gh} \doteq \sqrt{2 \cdot 10\,\mathrm{m \cdot s^{-2}} \cdot 5\,\mathrm{m}} = 10\,\mathrm{m/s}\,.$$

Rýchlosť sánkara na úpätí bude približne 10 m/s.

Minimalizácia potenciálnej energie

Na koniec si jednoduchom prípade, akým je padanie kameňa vo vákuu na Mesiaci ukážeme ešte jednu vec, ktorá platí pre *potenciálnu energiu* telesa.

Priamo na povrchu Mesiaca je gravitačné pole podobné tomu na Zemi, len je o niečo slabšie. Teraz je ale najdôležitejší fakt, že potenciálna energia vždy *rastie* s rastúcou výškou, teda čím vyššie sme na Mesiaci, tým vyššiu potenciálnu energiu máme.

Vidíme, že keď padá kameň, znižuje sa jeho potenciálna energia. Podobne aj približujúci sa meteoroid k planéte znižuje svoju potenciálnu energiu. Zdá sa akoby sa všetky telesá pohybovali tak, aby sa znižoval súčet ich potenciálnych energií. Reálne to nie je

[6] Hladinu nulovej potenciálnej energie si môžeme zvoliť úplne ľubovoľne. Pozor, počas výpočtu ju ale už nemôžeme meniť. Rozmyslieť si, v akej výške je potenciálna energia nulová, teda musíme skôr, ako sa pustíme do počítania.

presne tak, v skutočnosti telesá zrýchľujú[7] tým smerom, kam potenciálna energia klesá najviac. To má pre nás ešte zaujímavejšie výsledky.

Predstavme si kyvadlo (malé teleso zavesené na šnúrke) nehýbajúc sa v polohe, kedy je najnižšie. Ak kyvadlo vychýlime do hocijakého smeru, jeho potenciálna energia vždy narastie. Avšak, povedali sme si, že telesá zrýchľujú tým smerom, kam sa potenciálna energia znižuje a keďže taký smer v našom prípade neexistuje (každým smerom sa potenciálna energia zvyšuje), kyvadlo nezačne zrýchľovať. Takže ak sa na začiatku kyvadlo nehýbe, hýbať sa ani nezačne – ostane v rovnováhe.

Preto sa takáto poloha volá rovnovážna stabilná poloha. Určite ju poznáte aj z fyziky ako polohu, kde je výslednica síl pôsobiacich na teleso nulová. No pomocou energií vieme túto polohu definovať ako polohu, kedy po malom vychýlení telesa sa súčet potenciálnych energií systému zvýši (v našom prípade bolo systémom len samotné kyvadlo, preto sme nič nesčitovali). To tiež vieme chápať tak, že v rovnovážnej stabilnej polohe je potenciálna energia najmenšia spomedzi všetkých blízkych okolitých bodov.

Záver

Energie nám ponúkajú iný pohľad do sveta bez použitia síl. Riešenie možno pripomína skôr alchýmiu ako fyziku, no v niektorých prípadochoch je počítanie s energiami omnoho jednoduchšie ako riešenie príkladov pomocou síl.

Napríklad aj taký sánkar sa dá spočítať za použitia síl. No najskôr by sme museli zistiť, aké všetky sily na sánkara pôsobia. Tiež by sme museli zistiť aj ich *smery*, čo býva v komplikovanejších problémoch často veľmi ťažké. Nakoniec by sme museli napísať Newtonove zákony a zistiť, ako sa bude meniť rýchlosť sánkara v čase. A až potom by sme vedeli povedať, aká bude rýchlosť sánkara na úpätí kopca.

Naopak, pri energiách sme jednoducho použili zákon zachovania energie a porovnali sme počiatočný stav energií (ktorý sme poznali) a konečný stav. Na získanie správneho výsledku sme vôbec nepotrebovali zistiť, ako sa sánkar pohyboval v iných miestach a časoch.

A to je práve obrovská výhoda energií – perfektne sa hodia vtedy, keď nás zaujíma, ako vyzerajú fyzikálne veličiny iba v jednotlivých miestach.

[7] Zrýchlenie je veličina, ktorá popisuje to, ako sa veľmi zmení rýchlosť telesa za čas. Ak má niekto zrýchlenie $1\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$ (všimnite si exponent) znamená to, že za jednu sekundu sa jeho rýchlosť zmení vždy o $1\,\mathrm{m/s}$. Prvú sekundu má rýchlosť $1\,\mathrm{m/s}$, druhú $2\,\mathrm{m/s}$, atď.